نسخه پیش نویس

جبر و احتمال

پایه یازدهم

صفحه شناسنامه کتاب ضمیمه است.

فرم شماره ۱

شناسنامه کتاب

عنوان کتاب:	**دوره تحصیلی:**	**پایه:**	**کد کتاب:**
آمار و احتمال	**متوسطه ۲**	**یازدهم**	

۱–کتاب به کدام شایستگی‌ها (اهداف) ساحتهای تربیت پوشش می‌دهد؟

۱ـ ساحت علمی و فناوری (مستقیم)

۲ـ ساحت فراساحت‌ها (پشتیبان)

۲–کتاب به کدام شایستگی‌ها (اهداف) حوزه‌های تربیت و یادگیری پوشش می‌دهد؟

به هر ۴ شایستگی حوزه یادگیری ریاضیات که پیوست اشت پوشش می‌دهد و این پوشش در مورد شایستگی‌های ۱ و ۲ مستقیم و برای ۳ و ۴، پشتیبانی می کند.

۳– محتوای کتاب (ایده‌های کلیدی– مربوط به حوزه، از سایر حوزه‌ها)

۱ـ دانش ریاضی ۲ـ الگوها و روابط ۳ـ تفکر ریاضی ۴ـ کارکردهای زیبایی‌شناختی ۵ـ فناوری در ریاضی

به صورت تلفیق شده: موارد ۱ و ۲ و ۳ در بخش‌های غیر آماری مستقیماً و مورد ۵ در بخش آمار به‌صورت مستقیم پوشش داده می‌شود.

۴–اجزای بستهٔ آموزشی مرتبط با کتاب (کتاب راهنمای معلم، نرم‌افزار آموزش معلمان بر فراز آسمان، کتاب کار، فیلم آموزشی دانش‌آموز، کتاب گویا، فیلم آموزشی والدین ، ...) الزامی و غیرالزامی

- **اجزاء بسته برای ا جرای پروژه**

۱ـ کتاب راهنمای معلم

۲ـ نرم‌افزار آموزشی بر فراز آسمان

۳ـ کتاب کار دانش‌آموز

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادی[۱] نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره

استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید :

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی می‌رود.

چنین نیست که تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی برود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام‌جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید، چنانچه دو جملهٔ اول این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مقدمه‌های استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجه استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه مقدمه‌های استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هر عدد مرکب، عدد اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : ....

۱ـ Logic symbol

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن‌گاه مدارس تعطیل است.
به احتمال زیاد فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم است.
نتیجه : ....

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **محتوای جملۀ خبری که دارای ارزش درست یا نادرست است، گزاره[1] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست[2] یا نادرست[3] بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال به گزاره زیر دقت کنید.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[4]»

مانند :

$$۴=۲+۲\ ;\ ۶=۳+۳\ ;\ ۸=۳+۵\ ;\ ۱۰=۵+۵\ ;\ ۱۲=۵+۷\ ;\ \dots$$

گزاره بالا یک حدس در ریاضیات است و این حدس تاکنون اثبات نشده است. از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه‌بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است.
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

۱ــ Statement ۲ــ Truth ۳ــ False

۴ــ حدس گلد باخ

■ ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.
■ آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟
■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
■ هر معادله درجه دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.
■ صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p، q و r ، طبق جدول روبه‌رو دارای $۸=۲^۳$ حالت است. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	…	ن
…	ن	…
د	ن	ن
ن	د	…
…	د	ن
ن	…	…
…	…	…

ــ به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟

ــ با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟

گزاره‌نما

فعالیت

جمله‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاپ یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($۳x+۲y=۶$)

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

۲ چنانچه به جای مجهول در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟

اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad ,\quad ,\quad \}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چند مجموعهٔ مانند A وجود دارد که اگر آنها را به‌جای A قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود.

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad ,\quad ,\quad \}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، درست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[1] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[2] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S\subset D$.

۱ــ Domain of variable

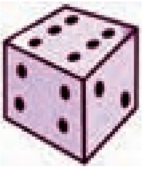
۲ــ Answer set

کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=\mathbb{Z})$

ب) $15x^2-7x-8=0$ $(D=\mathbb{R})$



پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{1}{6}$. $(D=\{1,2,\dots,6\})$

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

به جمله‌های زیر دقت کنید و به سؤال‌ها پاسخ دهید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.
- عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

۱ هریک از این جمله‌ها از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به‌صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «~» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش[1] برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌رو است :

$\sim p$	p
ن	د
د	ن

۱ــ Truth table

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می‌گوییم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم‌ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود. گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a \times b = ۰$ در این صورت $a = ۰$ یا $b = ۰$ یعنی :

$$a,b \in \mathbb{R} \,,\, a \times b = ۰ \Rightarrow (a = ۰) \vee (b = ۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^۲ + ۷x = ۰ \Rightarrow x(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x+۷ = ۰ \Rightarrow x = -۷$$

در نتیجه $x = ۰$ یا $x = -۷$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۷x = ۰$ هستند.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزارهٔ مرکب درست است؟

فرض کنید p : سوگند فارغ‌التحصیل شد و q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دوی p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p\wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p\wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.				
....	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن			
۲ عددی اول است	....		ن		
....	....	ن	ن		
(۷−) اول است	....			د	

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ به این هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$$

حل : چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(2x-y)^2\geq 0$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$(2x-y)^2=0\wedge(x-1)^2=0\quad\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2\end{cases}$$

شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.
در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

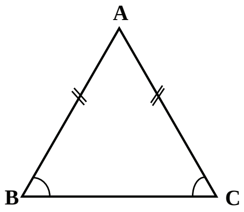
خواندنی

گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

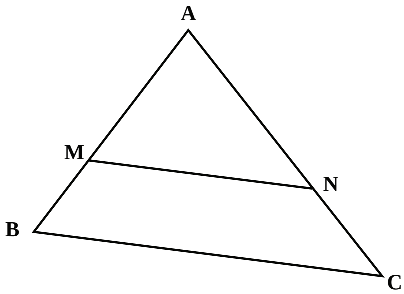
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.

$$\overset{\Delta}{ABC}: AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.



۳ $a^۲ \leq b^۲ \Rightarrow (a \leq b) \wedge (a \geq -b)$

۴ $a^۲ \geq b^۲ \Rightarrow (a \geq b) \vee (a \leq -b)$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن‌گاه $A \subset S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است :

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» درست است. در این حالت می‌گویند ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲ گزاره «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p \Rightarrow q$» و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ است.
با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :
الف) قانون ادخال فاصل : $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ ب) قانون حذف عاطف : $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

الف)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

ب)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.
حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).
($a^۲$ عددی زوج است $\Leftarrow a$ عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Leftarrow a^۲$ عددی فرد است)
چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = ۲k$، خواهیم داشت :

$$a^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k' \in \mathbb{Z}'} = ۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

دو شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p \Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره «$p \Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

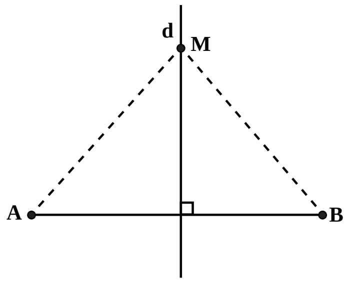
مثال : گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) $x=۲ \Leftrightarrow ۲x=۴$

ب) $x>۳ \Leftrightarrow ۲x-۵>۱$

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آن‌که احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



$[M \in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB) $] \Leftrightarrow MA=MB$

کار در کلاس

با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب

کار در کلاس

با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

۱ قوانین جابه‌جایی

$p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

۲ قوانین شرکت‌پذیری

$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

۳ قوانین توزیع‌پذیری

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند. هر گردو، گرد است. هر مربع یک مستطیل است. هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است. بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دسته برتر صعود می‌کنند.

بعضی از اعداد اول، زوج هستند. بعضی از متوازی‌الاضلاع‌ها، مستطیل هستند.

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ [1] و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ [2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2\geq 0$	$\forall\ x\in \mathrm{R}: x^2\geq 0$
	$\forall\ a\in \mathrm{E}: a=2k\ \ (k\in z)$
	$\exists\ p\in \mathrm{P}: p=2k\ \ (k\in z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

مجموعه اعداد زوج را با E، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش می‌دهند.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد. برای مثال عبارت زیر :

$$\forall\ x\in \mathbb{R}: x^2\geq x$$

نادرست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

الف) $\forall\ x\in \mathbb{Z}: x(x+1)=2k$ **ب)** $\forall\ x\in \mathbb{R}: tanx\times cotx=1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر $(\mathbb{Z})$ گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x=\frac{\pi}{۲}$ ، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. برای مثال عبارت زیر:

$\exists x\in \mathbb{Z}: |x|-۱<۰$

درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=۰$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند :

الف) $\exists x\in P: x=۲k$ ب) $\exists x\in \mathbb{R}: x^۲+۱=۰$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما $\{۲\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است.

ب) $\exists x\in N: ۲x^۲+۳x+۱=۰$

پ) $\exists x\in Z: ۲x^۲+۳x+۱=۰$

ت) هر عدد زوج غیر اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونه S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>۱$.

ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است.

نقیض سورها

گزاره «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

....

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

....

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض گزاره

بالا، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره بالا نادرست هستند و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی‌تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A : p(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A : P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim (\forall x \in A : P(x))$ باید درست باشد. از آن‌جا که ارزش گزاره $(\forall x \in A : P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A : \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim (\forall x \in A : P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim (\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت :

$$\sim (\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \sim P(x)$$

مثال : نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید و ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} : x^{۲} > ۰$ ب) $\exists y \in \mathbb{R} : y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x=۰$، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} : x^{۲} > ۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^{۲} \not> ۰ \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^{۲} \leq ۰$$

ب) درست است، زیرا $y=-۱$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R} : y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱) \equiv \forall y \in \mathbb{R} : \sim (y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱)$$
$$\equiv \forall y \in \mathbb{R} : y \geq ۰ \vee y^{۲} > ۱$$

تمرین

۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است.

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

پ) $۳+۵>۶$

ت) تخته سیاه را پاک کنید.

ث) $\{۱\}\in\{۱,۲,۳,۴\}$

ج) چه باران شدیدی می‌آید.

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است.

ح) $\varnothing\not\subset\mathbb{R}$

خ) $\sqrt{-۱}\notin\mathbb{Z}$

د) عدد $۸+۵^{۹}$ عددی اول است.

ذ) به امید کامیابی شما.

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷\times\square=-۷$

ب) $۵+\square\notin\mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸\times\square}{۴}\in\left\{۲,\frac{۱}{۳}\right\}$

ت) $۳\times۵\,\square\,\frac{۱۰\times۹}{۳}$

ث) $\square\times\sqrt{۲}=۰$

ج) $\{۱\}\,\square\,۱$

چ) $۵(\square-۳)=۲۰$

ح) $۷(\square-۳)=۳۵$

۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) xمربع کامل است

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ) $-\le\frac{۱\quad ۲}{\quad}$

ت) $\{n(n+۱)|n\in W\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۳\le۴$

ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است.

پ) $a\in\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگرaزوج باشد آن‌گاه $a+۱$ فرد است.

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$

ب) $(۵>۳)\vee(x^{۲}+۱=۰)$

پ) $(\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۶})\vee(۱\in\{۲,۳,۴\})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.

ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

چ) $۲>۳\Leftrightarrow -۲<-۳$

ح) اگر $a\in\{b\}$آن‌گاه $a=b$ وبر عکس.

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش $(p\wedge q)$
عدد ۲ زوج است.					د
	$۱\nless ۲$			ن	
$۲\in\{۱,۲\}$					ن
	عدد ۷ اول است.			د	

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$

ب) $\sim p\wedge p$

پ) $\sim p\vee p$

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

ب) $p\vee F\equiv p$

پ) $p\wedge T\equiv p$

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Rightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall,\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^۲<۰$.

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند x به‌طوری که $۲x-۱>۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A: x+۴=۱۰$

ب) $\forall x\in A: x+۲\leq ۹$

پ) $\exists x\in A: x+۳\leq ۴$

ت) $\forall x\in A: x+۱\geq ۶$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}: \dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}: (۲^{۲^n}+۱)\in p$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰): x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$

ت) $\exists y\in\mathbb{R}: \dfrac{x-۳}{۵}=۰$

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

یادآوری : در سال های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲, ۳, ۵, ۷\}$

می‌توان این مجموعه را با زبان نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم $۲\in A$ از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ ب) $\varnothing\in A$

پ) $\{a\} \subset A$ ت) $b\subset A$

ث) $a \in A$ ج) $\{a , b\} \subset A$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹$ و $۲x=۴\}$ ب) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$

پ) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$A=\{x \in\mathbb{Z} \mid |x| \leq ۲\}$

$B = \{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳ = m\}$

$C =\{k\in \mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}$

$D =\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$

۴ با توجه به مجموعه‌های قسمت‌های قبل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A\cap D\subset C$ $B\subset A$ $B\in A$

$B-D\subset A$ $C\not\subset A$ $B\subset C\cup A$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\} \subset A$ را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $b , c \in B$ متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subset A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

۴ فرض کنید $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم چهارم　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم nام　　…　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

فرض کنید A یک زیرمجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

اگر $A \subset B$ به‌طوری که $A \neq B$ آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای ۲^n زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با $۲^{n+۲}$ است، بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲}= ۲^n \times ۲^۲ =۴\times ۲^n$$

$$\Rightarrow ۲^n +۴۸=۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n-۲^n =۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n =۴۸ \Rightarrow ۲^n =۱۶= ۲^۴\Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعه A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

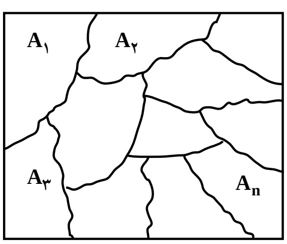
۱ مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید، تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

۲ از بین زیر مجموعه‌های A دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود.

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید.

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱ , A_۲ , \ldots , A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱ , A_۲ , \ldots , A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



$$\text{I) } \forall\ ۱ \le i\le n :\ A_i\neq\varnothing$$

$$\text{II) } \forall i \neq j\ :\ A_i\cap A_j=\varnothing$$

$$\text{III) } A_۱\cup A_۲\cup \ldots \cup A_n= \bigcup_{i=۱}^{n} A_i= A$$

کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{۴, ۸, ۹\}$ و $\{۲, ۶\}$ و $\{۱, ۳, ۵\}$

۲ $\{۵, ۷, ۹\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۱, ۳, ۵\}$

۳ $\{۷, ۹\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۱, ۳, ۵\}$

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

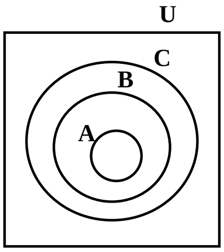
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subset B$. چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A\not\subset B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subset B$ و $A\not\subset B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subset B \Leftrightarrow \forall x\in A \Rightarrow x\in B$$

$$A\not\subset B \Leftrightarrow \exists x\in A \wedge x\notin B$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subset B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subset B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A\subset B$ و $B\subset C$ ثابت کنید $A\subset C$.

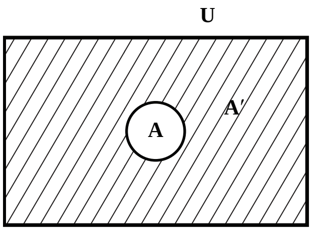
برهان : برای اثبات $A\subset C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\in A \Rightarrow x\in C$

برای این منظور از فرض‌های قضیه یعنی $A\subset B$ و $B\subset C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\in A \overset{A\subset B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subset C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$(\forall x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subset C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $B'\subset A'$.

(A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند). قبل از اثبات این قضیه، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات ویژگی ۲ــ برای اینکه ثابت کنیم $B'\subset A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\in B' \Rightarrow x\in A'$ بنابراین داریم :

$$\forall x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subset B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A'$$

در نتیجه داریم :

$$(\forall x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subset A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subset A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subset A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $(\forall x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subset A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in A \text{ یا } x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :
$$(\forall x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subset A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توجیه کنید.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ آن‌گاه $A\cup C\subset B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x\in(A\cup C)\Rightarrow\begin{cases} x\in A\Rightarrow\cdots & (A\subset B \text{ زیرا })\\ \vee & \vee\\ \cdots\quad\Rightarrow\quad x\in D & (C\subset D \text{ زیرا })\end{cases}\Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow\ldots\ldots$$

بنابراین داریم :

$$[\forall x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow\ldots\ldots$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A\subset C$ و $B\subset C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subset C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subset B$ و $B\subset A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت :

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subset B)\wedge(B\subset A)]$$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱,۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subset B\cap A \quad (۱) \ ; \quad B\cap A\subset A\cap B$$

اثبات (۱) :

$$\forall x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A \qquad (\text{طبق خاصیت جابه‌جایی } \wedge)$$

$$\Rightarrow x\in B\cap A$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subset B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\notin B\} \qquad (\text{زیرا } A\subset B)$$

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\mid$ یک لوزی است $x\}$ $A=\{x\mid$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x\mid$ یک مربع است $x\}$ $B=\{x\mid$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subset C$ ب) $B\subset D$

پ) $A\subset B$ ت) $D\subset A$

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند.   ب) $X\subset A$ ولی $X\not\subset C$

پ) $X\subset D$ ولی $X\not\subset B$ ت) $X\subset C$ ولی $X\not\subset A$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ب) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ ت) $\{\varnothing \text{ و } \{\varnothing\}\}\in\{\varnothing \text{ و } \{\varnothing \text{ و } \{\varnothing\}\} \text{ و } \{\varnothing\}\}$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳=x\}$ $A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<۲\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۲\leq ۱\}$ $C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^۲\leq ۲y\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A\subset B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر $A=\{2, x+2y, 4\}$ و $B=\{4, 5, x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subset B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subset B\cup C$ ب) $A\cap C\subset B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subset B\cap D$ ب) $A\cap C\subset B\cup D$

۱۱ الف) فرض کنید $A\subset\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subset A$ ثابت کنید $A=U$.

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ ب) $A-B=A$

۱۳ فرض کنید $X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\quad \mathrm{I})\forall\ a,b\in IR\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\quad \mathrm{II})\forall\ a,b,c\in\ IR\ ;\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به + $\quad \mathrm{III})\forall\ a,b,c\in IR;\ \ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

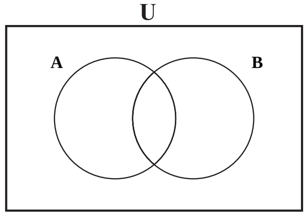
در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).

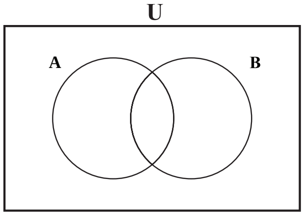
الف)

U



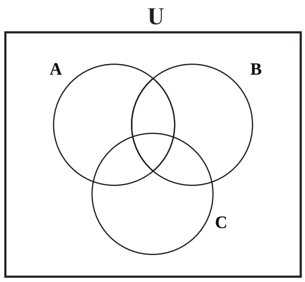
$B\cup A$

U

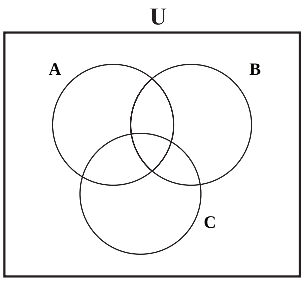


$A\cup B$

ب)

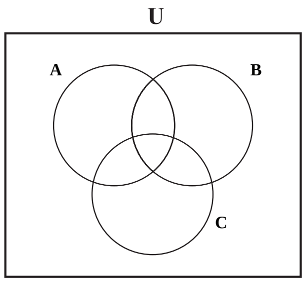


A∪(B∪C)

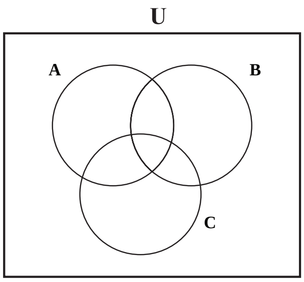


(A∪B)∪C

ج)

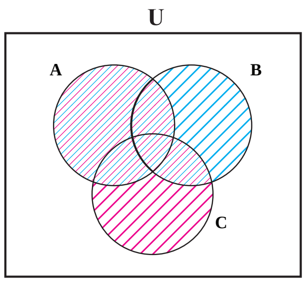


(A∩B)∪(A∩C)

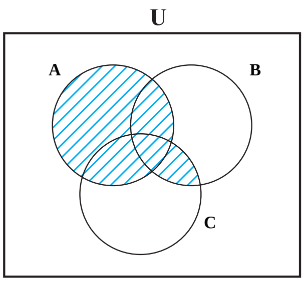


A∩(B∪C)

د)



(A∪B)∩(A∪C)



A∪(B∩C)

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای ∪ و ∩ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$(A\cup B)=(B\cup A)$

$(A\cup B)=\{x\in U|\ x\in A \vee \dots\}$ تعریف اجتماع

$(B\cup A)=\{x\in U|\ x\in B \vee \dots\}$ جابه‌جایی $\vee$ تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U|\ \dots \vee x\in(B\quad C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in A \vee (x\in B \vee \dots)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|(\dots \vee x\in B) \vee x\in C\}$ شرکت‌پذیری $\vee$

$=\{x\in U|x\in(\dots)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$]

$[x\in A \ \vee\ (x\in \dots]$ تعریف اجتماع

$[(x\in A \vee (x\in B \wedge x\in \dots)]$ تعریف اشتراک

$[x\in A\ \vee \dots)\wedge(\dots \vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$

$[x\in\ \dots \wedge x\in \dots]$ تعریف $\cup$

$x\in[(A\cup B)\cap \dots]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq \dots$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap(B\cup C)\subseteq \dots$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که عکس خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است).

الف) $(A\cup B)\cap (B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup (A'\cap C)=C$

پ) $A\cup (B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap (B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap (A\cup B')$

$=A\cup (B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup (A'\cap C)=(C\cap A)\cup (C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap (A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup (B\cup A')=A\cup (A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

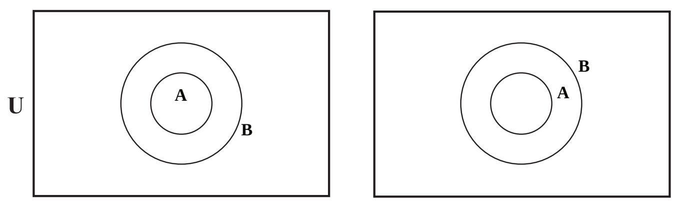
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A \wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A \wedge x\in B'\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$ $(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب،قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$، رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

می‌دانیم: $B\subseteq B$
طبق فرض: $A\subseteq B$
$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow (A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A\cup B)=B$

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq (A\cup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم:

با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A\cap B)\subseteq A$ (۱)

می‌دانیم : $A\subseteq A$
طبق فرض : $A\subseteq B$
$\Rightarrow (A\cap A)\subseteq (A\cap B)\Rightarrow A\subseteq (A\cap B)$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید)

(۱)و (۲) $\Rightarrow (A\cap B)=A$

حال فرض می‌کنیم $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم : $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

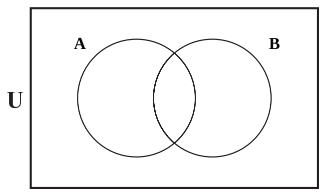
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم‌پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

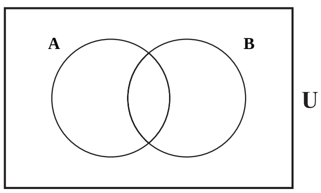
الف) $A\cup (A\cap B)=A$

ب) $A\cap (A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



$A\cup(A\cap B)$



$A\cap(A\cup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq A \xrightarrow{\text{قضیه}} A\cup(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq (A\cup B)\xrightarrow{\text{قضیه}} A\cap(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\quad B)$

$=A\cap(\dots\dots)$ فاکتورگیری

$=A\cap\dots\dots=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\dots\dots)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\dots\dots\dots)$ فاکتورگیری

$=A\cup\dots\dots\dots=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap\dots\dots}_{\text{جذب}}]$

$=\underbrace{(A\cap B)\cup\dots\dots}_{\text{جذب}}=\dots\dots$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{C})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{C})]$ جابه‌جایی

$=(\underbrace{A\cup B'}_{C})$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\dots\dots\dots$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$	$= (A\cap C')\cup (B\cap C')$
تبدیل اشتراک به تفاضل	$=(A-C)\cup (B-C)$

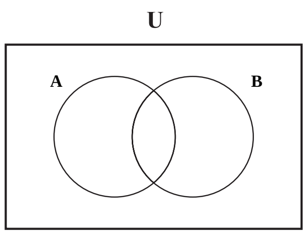
ث) $(A-B)\cup (A\cap B)\cup (B-A)$

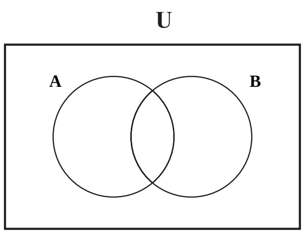
شرکت‌پذیری اجتماع	$=[(A-B)\cup (A\cap B)]\cup (B-A)$
تبدیل تفاضل به اشتراک	$=[(A\cap B')\cup (A\cap B)]\cup (B\cap A')$
عکس عمل توزیع‌پذیری	$=[A\cap (\ldots\ldots \cup \ldots\ldots)]\cup (B\cap A')$
تعریف متمم	$=(A\cap U)\cup (B\cap A')$
تعریف مرجع	$=A\cup (B\cap A')$
توزیع‌پذیری	$=(A\cup \ldots\ldots)\ \ldots\ldots\ (A\cup \ldots\ldots)$
تعریف متمم	$=(A\cup B)\cap U$
تعریف مرجع	$=A\cup B$

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۲ اگر فرض کنیم $U=\{$۱ و ۲ و .... و ۱۰$\}$ و $A=\{$۲و۳و۵و۸$\}$ و $B=\{$۳و۴و۶و۸$\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\quad B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند :

الف) $(A\cup B)' =(A'\cap B')$

ب) $(A\cap B)' =(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$

$[x\in (A\cup B)'\Rightarrow x\notin (A\cup B)\Rightarrow \ldots\ldots \wedge\ x\notin B$

$\Rightarrow x\in A' \wedge \ldots\ldots \Rightarrow\ x\in (A'\cap B')] \Rightarrow (A\cup B)'\subseteq\ (A'\cap B')$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$ ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

مثال: با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$ ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل:

الف) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$	شرکت‌پذیری
$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$	جابه‌جایی
$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$	....
$=(A\cap B')\cap C'$	$A\cap A=A$
$=A\cap(B'\cap C')$	شرکت‌پذیری
$=A-(B'\cap C')'$	تبدیل اشتراک به تفاضل
$=A-(B\cup C)$	قانون ....

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$	قانون دمورگان
$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$	توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع
$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$	قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری
$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$	تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم
$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$	
$=A\cap(B-C)$	

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,........,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=..............$

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap (A\cup B)=A\cap (A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (1)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup (A\cup B)= \ldots\ldots \cup (A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} \ldots\ldots \subseteq \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow A=B$$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید :

$$A\subseteq (A\cup B)=(A\cap B) \subseteq B \Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

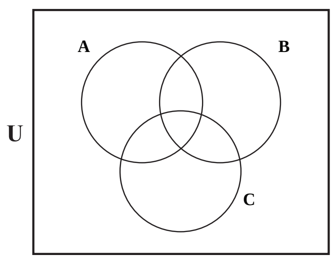
۱ اگر $A=\{1, 2, \ldots, 10\}$ و $B=\{5, 6, \ldots, 15\}$ و $U=\{1, 2, \ldots, 20\}$ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup (A\cap B)$

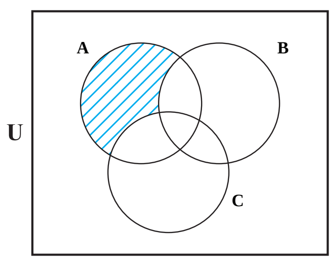
ب) $(A-B)\cup ((A\cap B')\cap [(B-A)\cup A'])$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.

پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختصِ اول یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$(A\times B)=\{(۲,۴),(۲,۵),\ldots\ldots,\ldots\ldots,(۶,۴),\ldots\ldots\}$$

$$(B\times A)=\{(۴,۲),(۴,۴),\ldots\ldots,(۵,۲),\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

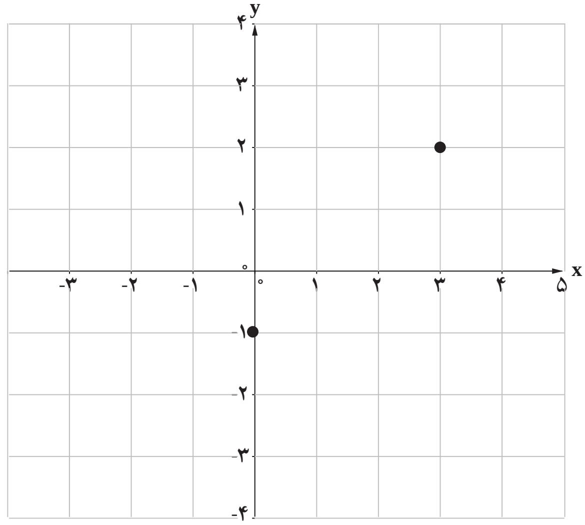
در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به‌وجود آمد حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و اصل ضرب نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

فعالیت

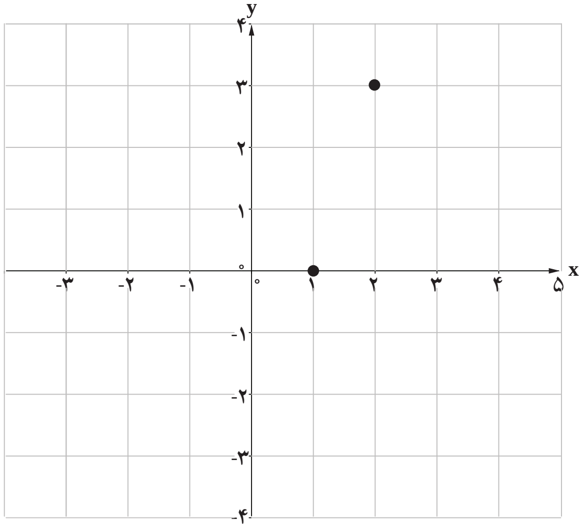
۱ اگر $A=\{1,-1,2,-2\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=$

$B\times A=$



نمودار مختصاتی $B\times A$

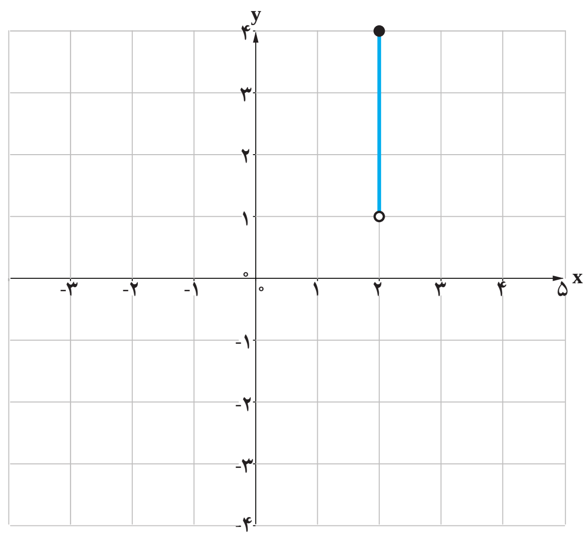


نمودار مختصاتی $A\times B$

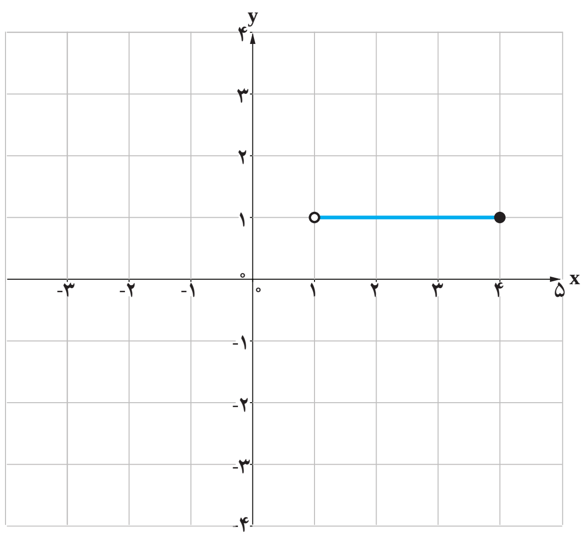
۲ اگر فرض کنیم $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in(1,4]\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\mid(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$$



نمودار $B\times A$

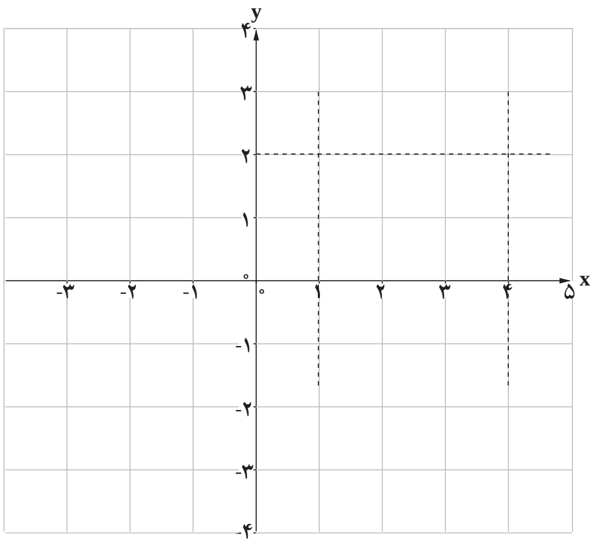


نمودار $A\times B$

۳ اگر فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)|۱\leq x\leq ۴\wedge ۰\leq y\leq ۲\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض $A\times\varnothing\neq\varnothing$ کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در .... باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \cdots\cdots\cdots\wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم بر قرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A\wedge\exists\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge\cdots\cdots\Rightarrow\cdots\cdots\wedge B\subseteq A$$
$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Longrightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)\Longrightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$

۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند. مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند. به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستتان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آن نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را بنویسید.

$S=\{(\text{ر},۱), \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$A=\{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$B=\{\dots, \dots\}$

$A\cap B=\{\dots\dots\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\quad,\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\quad,$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $P(A|B)$ را به دست آورید.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

۳ با مقایسه $P(A|B)$ و $P(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

۴ اگر $P(A|B)=P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ برقرار است؟

۵ در تساوی $P(A|B)=P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B|A)=P(B)$ را نتیجه بگیرید.

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $P(A)$ و $P(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $P(A|B)=P(A)$ و یا تساوی $P(B|A)=P(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $P(A|B)=P(A)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد، بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می آوریم.

$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\ ,$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\ ,$$

$$A\cap B=\{(۳,۶)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد، به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر و یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $P(A)$ احتمال قبولی زهرا و $P(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $P(A\cup B)$ است و می‌دانیم که :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

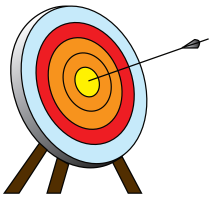
با توجه به مستقل بودن A و B، $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، پس

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳\\&=۰/۹۷\end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند.



۳ در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد سفید بودن مهره اول و B پیشامد سیاه بودن دومین مهره باشد،

الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطه $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ رامحاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$P(B)=P$ (مهره دوم سیاه)

$=P$ [(مهره اول سفید و مهره دوم سیاه) یا (مهره اول سیاه و مهره دوم سیاه)]

$=P[(A\cap B)\cup(A'\cap B)]$ (A' متمم پیشامد A است.)

$=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$

$=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$

$=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}$

$=\frac{۸}{۱۳}$

تذکر : (باز کردن $P(B)=\frac{۸}{۱۲}$)

از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ ، پس $P(B|A)\neq P(B)$ ، بنابراین A و B وابسته‌اند.

کار در کلاس

در مثال صفحه قبل، اگر مهره دوم را پس از جای‌گذاری مهره اول در جعبه بیرون آوریم. با محاسبه $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است، زیرا با جای‌گذاری مهره اول انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهره دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهره اول است و در حقیقت آزمایش اول تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل هستند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد A_1، A_2، ...، A_n را مستقل می‌گوییم هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از آنها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم :

$P(A)=P$ (دختر، دختر، دختر، دختر)

$=P$(دختر) P(دختر) P(دختر) P(دختر)

$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

$=\frac{۱}{۱۶}$

مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس :

$P(B)=P$ (دختر، پسر، پسر، دختر)

$=P$(دختر) P(پسر) P(پسر) P(دختر)

$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

$=\frac{۱}{۱۶}$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$P(\text{دختر، پسر، دختر، پسر}) = P(\text{دختر})\ P(\text{پسر})\ P(\text{دختر})\ P(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است، بنابراین :

$$P(C) = ۶ \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سواد هستند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اولین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اول نیست ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$\begin{aligned} P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) &= P(\text{نفر اول بی‌سواد})\ P(\text{نفر دوم بی‌سواد})\ P(\text{نفر سوم بی‌سواد})\ P(\text{نفر چهارم بی‌سواد})\ P(\text{نفر پنجم بی‌سواد}) \\ &= (۰/۲)^{۵} \\ &= ۰/۰۰۰۳۲ \end{aligned}$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

(i) A' و B

(ii) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعه $\{۱، ۲، ۳، \ldots، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام

شود، مطلوب است احتمال اینکه :

(i) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

(ii) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

(iii) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۷ در یک امتحان چهار گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که :

(i) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح بدهد.

(ii) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح بدهد.

(iii) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح بدهد.

۸ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها سوخته است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

(i) هر سه لامپ معیوب باشند.

(ii) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۹ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۲ احتمال

۱ مبانی احتمال

آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانهٔ تولید لوازم خانگی می‌خواهند برای سال آینده تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به‌وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایهٔ کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید یخچال، کولر، اجاق‌گاز و . . . شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزار مطالعه و حل چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را به‌درستی جمع‌آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به‌دست آورد و سپس به سؤال‌هایی مانند «در سال آینده تقاضای یخچال، کولر، اجاق‌گاز و . . . چگونه خواهد بود؟»، «قدرت خرید مردم و میزان تولید شرکت‌های رقیب چه وضعی خواهد داشت؟» و . . . پرداخت. در ادامه استفاده از علم احتمال کمک می‌کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

به‌طور خلاصه بخشی از این دو علم به‌نوعی در جهت عکس هم هستند : آن‌گاه که با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است ولی اگر جامعه را بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می‌آید.

البته مصادیق استفاده از این دو علم بسیار وسیع‌تر و متنوع‌تر از این مثال است.

علم احتمال : بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم

علم آمار : شناختن جامعهٔ نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شدهٔ معلوم

کار در کلاس

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران بحث کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟	☐	☐
۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	☐	☐
۳ــ اگر برای کارمندان شهرداری شهر تبریز تسهیلات نیم‌بهای قیمت سفر به مشهد مقدس فراهم شود، چند نفر از آن استفاده خواهند کرد؟	☐	☐
۴ــ در انتخابات ۷ اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردداربوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	☐	☐
۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان سال یازدهم مدرسه شما به درس آمار و احتمال علاقه دارند؟	☐	☐

ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حل مسائل سخت و پیچیده ابتدا کار را از طراحی و حل مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و... به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اولی دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. بیایید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئله‌ای ساده که در آن عدم اطمینان وجود دارد را بررسی کنیم:

فعالیت

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم هستند؛ در اولی ۳ لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبهٔ اول ۶۰ درصد و در جعبهٔ دوم ...... درصد لامپ‌ها سالم هستند پس بهتر است جعبهٔ ...... را انتخاب کند.

اکنون فرض کنید باز دو جعبه همان شرایط را دارند ولی برق‌کار از آن جعبه دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

در این حالت تصمیم‌گیری به سادگی حالت اول نیست.

کار در کلاس

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبهٔ اول مذکور انتخاب کرد؟ در چند حالت هر دو لامپ سوخته است؟ مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبهٔ دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چنین مسائلی هر چند ساختگی و ظاهراً بی‌کاربرد هستند ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند : تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

خواندنی

از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژهٔ احتمال و مشابه‌های آن مانند شانس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است : «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران شانس بالایی برای راه‌یابی به المپیک آینده را دارد» و . . .

مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد از اعداد نیز استفاده می‌کنند ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حس کیفی است : «به احتمال ۹۹ درصد هفتهٔ بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتهای جدول یک درصد هم شانس قهرمان شدن ندارد» و . . .

شما نیز چند مثال بزنید که مردم یا رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم قطعیت می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمرهٔ خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمی می‌کند یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی قرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و اتکا رسید.

ترجمهٔ زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولاً وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کنیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران ببارد»، احتمال اینکه «نتیجهٔ مسابقهٔ فوتبال هفتهٔ آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیرشده، مجرم باشد» و . . .

ولی ریاضی‌دانان گاهی به‌شکلی دیگر احتمال را به‌کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به یاد بیاورید : فرض کنید برق‌کار جعبهٔ اول را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ سوخته باشند.

شمارهٔ لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق‌کار معلوم نیست ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعهٔ زیر است :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» و به هر عضو آن یک «برآمد» گفته می‌شود.

برق‌کار در صورتی راضی می‌شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شمارهٔ لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت این اتفاق را هم می‌توان با یک زیرمجموعهٔ فضای نمونه مشخص کرد :

$A=\{۱,۲,۳\}$

همانطور که در سال‌های گذشته خوانده‌اید در علم احتمال به این زیر مجموعه‌ها «پیشامد» گفته می‌شود.

در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می‌توانیم بگوییم «پیشامد A رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می‌توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن A». عبارت اخیر خلاصه‌شدهٔ این عبارت است «احتمال اینکه شمارهٔ لامپ انتخابی عضو A باشد».

پس توجه داشته باشید که اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند آن‌گاه :

- اگر $A_۱$ زیرمجموعهٔ $A_۲$ باشد، رخ دادن $A_۱$ رخ دادن $A_۲$ را نتیجه می‌دهد.
- رخ دادن پیشامد $A_۱\cap A_۲$ یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.
- رخ دادن پیشامد $A_۱\cup A_۲$ یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

کار در کلاس

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهٔ پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

- زهرا : فضای نمونه در این مسئله مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ است.
- شبنم : بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۴ بیاید آیا پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ داده است؟
- زهرا : به نظرم نه، چون ۲ و ۶ هم علاوه بر ۴ عضو این پیشامد هستند.
- شبنم : ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۴ است.
- زهرا : پس ۲ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم : یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این‌طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

تشخیص فضای نمونه

هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم قدم اول شناختن فضای نمونه است. همان‌طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه‌ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می‌گوییم، مشخص می‌کنند که نتیجه آزمایش یا مشاهده‌ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت‌هایی دارد. مثلاً در پرتاب یک تاس مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از پرتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم؛ مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}\times\{۱,۲,...,۶\}$ که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس‌ها را تاس اول و دیگری

را تاس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) چیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونهٔ $S_۱$ و $S_۲$ باشد فضای نمونهٔ مناسب $S_۱ \times S_۲$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز درست است.

مثال : یک رانندهٔ خطی تاکسی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می‌توان مجموعهٔ زیر را فضای نمونه گرفت :

$S = \{۰,۱,۲,۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\}$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر دیگر سوار کرده است. به این نکته توجه کنید ۲۵ برآمد این فضای نمونه می‌توانند هم‌شانس نباشند. وقتی در درس‌های جلوتر با احتمال غیرهم‌شانس آشنا شدید این موضوع را بهتر می‌فهمید.

اصول احتمال

در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف، که زیرمجموعه‌های فضای نمونه هستند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهم‌شانس است بهتر متوجه خواهید شد. به عنوان مثال به وضعیت آب و هوای قلهٔ دماوند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می‌توان اعضای فضای نمونه را این‌چنین در نظر گرفت :

آفتابی، ابری

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام ۵۰ درصد باشد؟
ممکن است کسی اعضای فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند :

آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد باید احتمال هر کدام ۲۰ درصد باشد؟
اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار ۵۰ درصد و یک بار ۲۰ درصد دانسته است!

خواندنی

یک اشتباه تاریخی

مشهور است که دالامبر[1]، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دائرةالمعارف‌نویس فرانسوی قرن هجدهم، تصور می‌کرد که اگر یک سکه را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه یک بار رو و یک بار پشت بیاید برابر یک سوم است. او این‌گونه استدلال می‌کرد :

در چنین آزمایشی سه حالت وجود دارد : «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت محاسبهٔ احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است پیچیده‌تر باشد ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشد که به آنها اصول احتمال می‌گویند :

برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازهٔ $[۰,۱]$ است.

اصول احتمال عبارت هستند از :

۱ $P(S)=۱$

۲ برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ ، داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد A و B فرض شده، یعنی $A\cap B=\varnothing$، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معنی است که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت می‌گوییم A و B سازگار هستند.

به P، «تابع احتمال» گفته می‌شود : تابعی که دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ پیشامدها است.

قضیه

هر فضای احتمال خواص زیر را دارد :

۱ $P(A')=۱-P(A)$

۲ $P(\varnothing)=۰$

۳ اگر A، B و C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند آن‌گاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

۱ـ Jean_Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳)

اثبات. برای اثبات ۱، به این موضوع توجه کنید که A و A' دو پیشامد ناسازگار هستند و اجتماع آنها برابر S می‌شود، داریم :

$$۱=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

در نتیجه $P(A')=۱-P(A)$.

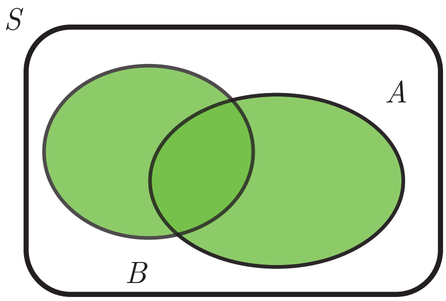
شمارهٔ ۲ در از این نتیجه می‌شود که $\varnothing$ مکمل S است و لذا

$$P(\varnothing)=۱-P(S)=۱-۱=۰$$

برای اثبات شمارهٔ ۳ به این توجه کنید که A و $B\cup C$ نیز دو پیشامد ناسازگار هستند و لذا

$$P(A\cup B\cup C)=P\big(A\cup(B\cup C)\big)=P(A)+P(B\cup C)=\cdots$$

برای اثبات شمارهٔ ۴ توجه کنید که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و پیشامدهای $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگار هستند پس



$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

و این نتیجه می‌دهد که $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

برای اثبات شمارهٔ ۵ توجه کنید که $A\cup B=A\cup(B-A)$ و به‌علاوه دو پیشامد A و $B-A$ ناسازگار هستند. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$$

با استفاده از شمارهٔ ۴ به جای جملهٔ $P(B-A)$ مقداری را قرار دهید و اثبات را کامل کنید.

کار در کلاس

در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگار هستند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید، A : متولد ماه مهر باشد، B : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید، A : هر سه بار مشابه بیاید، B : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا A : خورشید در آسمان دیده شود، B : باران ببارد.

۴ تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید، A : برای اولین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید، B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

تمرین

۱ احمد و عباس با هم دو مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه مناسب برای این اتفاق چیست؟

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونهٔ مناسب چیست؟ اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود کوتاه‌ترین عضو تیم باشد چقدر است؟

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد، معتدل یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک، متوسط یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف است یا ابری؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه چیست و چند عضو دارد؟

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subset A$ داریم $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

ب) اگر $B \subset A$ آن‌گاه $P(B) \leq P(A)$.

۵ عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

درس ۳ احتمال شرطی

در مسائلی که در آنها با عدم قطعیت و احتمال سر و کار داریم، گاهی با سؤال‌هایی شرطی مواجه هستیم : «اگر فردا برف ببارد، چقدر احتمال دارد راه برخی روستاهای دهستان‌های شهرستان کنگاور مسدود شود؟»، «اگر راننده‌ای از کمربند ایمنی استفاده نکند، چقدر احتمال دارد پس از تصادف دچار نقص عضو شود؟»، «اگر دانش‌آموزی در سال یازدهم موفق به کسب معدل بالای ۱۸ شود، چقدر احتمال دارد که در سال گذشته معدلش زیر ۱۵ بوده باشد؟» و . . .

در همهٔ این موارد با دو پیشامد مختلف سر و کار داریم و فرض می‌کنیم یکی از آنها رخ داده است و می‌خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دومی چه تغییری کرده است.

فعالیت

۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های یک تا بیست یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهٔ کارت اکبر ۱۵ و شمارهٔ کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

۲ در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱۱/۱، ۱۱/۲ و ۱۱/۳ وجود دارد که به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل می‌شوند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه، که شامل همهٔ دانش‌آموزان مقطع یازدهم است، چند عضوی است؟

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب‌شده نمرهٔ کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ است. در این صورت چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمرهٔ کامل شده باشد؟

در حل قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز مقطع یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ است، به فضای نمونهٔ دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد ـــ ∩ ـــ را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعهٔ ـــ تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ پرسیده شد از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲، که پیشامد A «کسب نمرهٔ کامل» و B «دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ بودن» بود آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمرهٔ کامل به شرط دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ بودن» بود که با $P(A|B)$ نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفت؟

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

باز هم به دو فعالیت قبل توجه کنید. در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S، را کنار گذاشته و B را فضای نمونه تلقی کنیم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

کار در کلاس

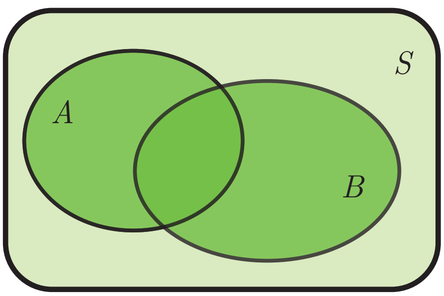
فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب بیشتر از ۹ شده است. در این صورت احتمال این‌که دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

احتمال شرطی چگونه محاسبه می‌شود؟

همان‌طور که اشاره شد، اگر با احتمال هم‌شانس سر و کار داشته باشیم محاسبهٔ $P(A|B)$ ساده است؛ کافی است تعداد حالات مطلوب را به تعداد حالات ممکن تقسیم کنیم ولی باید توجه داشته باشیم که چون می‌دانیم B رخ داده است دیگر همهٔ اعضای پیشامد A ممکن نیستند و لذا مجموعهٔ حالت‌های مطلوب در این وضعیت $A\cap B$ است. پس



$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

ولی در حالت کلی، که احتمال می‌تواند هم‌شانس نباشد چه باید کرد؟

فعالیت

دوباره فرض کنید موضوع بحث احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(\ldots\ldots\ldots)}{n(B)/n(\ldots\ldots\ldots)}=\frac{P(\ldots\ldots\cap\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

اگر فعالیت قبل را به‌درستی انجام داده باشید به تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) رسیده‌اید :

در صورتی‌که B پیشامدی در یک فضای احتمال باشد که $P(B)>0$ برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : در حالتی که $P(B)=0$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال : سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست‌کم یک بار رو آمده است. در این صورت احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست‌کم یک بار رو آمدن سکه را B می‌نامیم. باید $P(A|B)$ را حساب کنیم. پس با توجه به تعریف باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را ابتدا محاسبه کنیم. فضای نمونه ۸ عضوی است و پیشامد $A\cap B$ یعنی سکه سه بار رو آمده باشد و به‌علاوه دست‌کم یک بار رو آمده باشد و این در واقع یعنی سکه در هر سه پرتاب رو آمده باشد. پس

$$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

برای محاسبهٔ $P(B)$ بهتر است به پیشامد مکمل آن توجه کنیم؛ پیشامد B' یعنی سکه اصلاً رو نیامده باشد که فقط یک حالت است. در نتیجه

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

و لذا

$$P(A|B)=\frac{1/8}{7/8}=\frac{1}{7}$$

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

حل : الف) فرض کنید پیشامد A یعنی تاس سبز ۶ بیاید و پیشامد B یعنی مجموع دو تاس ۱۰ شود. پس در این مثال $P(A|B)$ خواسته شده است و لذا باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را ابتدا محاسبه کنیم. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و یک فضای

هم‌شانس است پس باید تعداد اعضای یک پیشامد را برای رسیدن به احتمال آن به‌دست آوریم.

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\} \Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۳۶}$$

$$A\cap B=\{(۶,۴)\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$$

در نتیجه $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$.

حل : ب) طبق نمادگذاری قسمت قبل، باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که $P(A)=\frac{۱}{۶}$. پس

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱/۳۶}{۱/۶}=\frac{۱}{۶}$$

مثال : تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به‌تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اول کوتاه‌تر است. در این صورت احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

حل : پاسخ سؤال اول ساده است؛ با توجه به اینکه یکی از ۱۴ بازیکن بلندقدترین بازیکن تیم است، احتمال اینکه آن فرد همان باشدکه ما تصادفاً انتخاب کرده‌ایم $\frac{۱}{۱۴}$ است.

برای به دست آوردن پاسخ قسمت ب این پیشامد که بازیکن اول بلندقدترین باشد را A و این پیشامد که بازیکن اول از بازیکن دوم بلندتر باشد را B می‌نامیم. باید $P(A|B)$ را به‌دست آوریم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۱/۱۴}{۱/۲}=\frac{۱}{۷}$$

کار در کلاس

در ادامهٔ فعالیت مربوط به دانش‌آموزان کلاس یازدهم، پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱۱/۱ بودن» را با $B_۱$ می‌نامیم و $B_۲$ و $B_۳$ را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید.

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

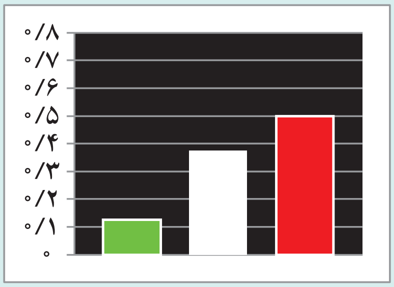
پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟

خواندنی

نگاهی دیگر به احتمال شرطی : تغییر تابع احتمال

رویکرد کاهش فضای نمونه فقط مناسب فضاهای هم‌شانس است ولی رویکرد دیگری به احتمال شرطی وجود دارد که در همهٔ موارد به کار می‌آید و در آن فضای نمونه تغییری نمی‌کند، بلکه احتمال پیشامدها تغییر می‌کند.

فرض کنید داخل یک کیسه یک گوی سبز، سه گوی سفید و چهار گوی قرمز وجود دارد و ما یک گوی از آن خارج می‌کنیم.



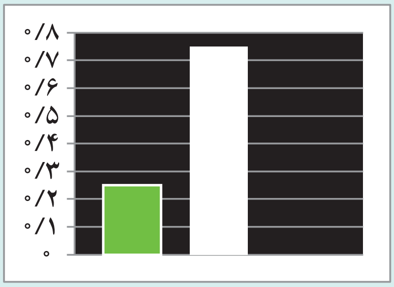
الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چیست؟ آیا این فضای احتمال، هم‌شانس است؟

ب) نمودار روبه‌رو برای توصیف تابع احتمال این فضا رسم شده است. ارتفاع سه ستون، سبز، سفید و قرمز باید دقیقاً چقدر باشد؟

پ) اگر بدانیم گوی خارج شده سبز یا سفید است، احتمال سفید بودن و احتمال سبز بودن گوی را با روش شمارش محاسبه کنید.

ت) اگر بخواهیم فضای نمونه را همان فضای سه عضوی قبلی بگیریم نموداری که در این حالت فضای احتمال را توصیف می‌کند، چگونه خواهد بود؟ ارتفاع ستون‌ها باید دقیقاً چقدر باشد؟ چرا ستون قرمز حذف شده است؟

ث) نسبت ارتفاع نمودار سبز به ارتفاع ستون سفید در نمودار اول بیشتر است یا دوم؟ چرا؟



ج) آیا می‌توانید بگویید در این فعالیت نسبت به چه پیشامدی شرطی‌سازی بررسی شده است؟

گیریم S یک فضای نمونهٔ متناهی (هم‌شانس یا غیرهم‌شانس) باشد. در این صورت هر کدام از برآمدها (اعضای S) احتمال رخ دادنی دارند.

اکنون اگر مطلع شویم که پیشامد B رخ داده است، می‌توانیم این‌گونه فکر کنیم که احتمال رخ دادن تمام برآمدهایی که عضو B نیستند، مثل قرمز در فعالیت قبل، صفر شده و احتمال رخ دادن برآمدهایی که عضو B هستند، مثل سبز و سفید در فعالیت قبل، با یک ضریب برابر افزایش پیدا کرده‌اند.

در حالت کلی‌تر، بعد از شرطی کردن نسبت به B، هر پیشامدی که زیر مجموعهٔ B' باشد، احتمال رخ دادنش صفر می‌شود و احتمال پیشامدهایی که زیرمجموعهٔ B هستند، همه در یک ضریب ثابت مثل C ضرب می‌شوند.

در مورد شرطی کردن یک پیشامد دلخواه مثل A می‌توان آن را به زیرمجموعهٔ خودش افراز کرد :

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

و در نتیجه

$$P(A|B)=P(A\cap B|B)+P(A\cap B'|B)=cP(A\cap B)+0$$

ضریب c باید به شکلی باشد که احتمال کل، یعنی $P(S|B)$، برابر یک شود و همان‌طور که در تعریف احتمال شرطی می‌بینید این ضریب ثابت $\frac{1}{P(B)}$ است. (منظور از ثابت بودن این ضریب، این است که هر چند مربوط به پیشامد B است ولی ربطی به پیشامد A ندارد).

کار در کلاس

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد.

الف) نشان دهید برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B)=1-P(A|B)$.

ب) نشان دهید اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند :

$$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

دانستن تعریف احتمال شرطی و درک درستی از مفهوم آن برای حل مسائل احتمال لازم است ولی کافی نیست. در ادامه، با سه ابزار آشنا می‌شویم که در حل مسائل احتمال بسیار مفید هستند. این سه ابزار «قانون ضرب احتمال»، «قانون احتمال کل» و «قانون بیز» است. هر سه مورد را، در برخی کتاب‌ها با عنوان «قضیه» و «فرمول» نیز می‌شناسند. توجه داشته باشید که شما علاوه بر اینکه باید با این سه قانون آشنا شوید این را هم باید بیاموزید که هر کدام در چه مواردی به کار می‌آیند.

در هر قسمت برای یادگیری بهتر هر قانون، مثال‌هایی مطرح خواهد شد که ممکن است برخی به‌قدری ساده باشند که با روش‌های قبلی نیز قابل حل کردن باشند. انتخاب چنین مثال‌هایی به این دلیل است که مطلب در ابتدا در ذهن شما به‌درستی جا بیفتد. در ادامه برخی مثال‌های پیچیده‌تر هم آمده است تا در استفاده از این ابزارها متبحرتر شوید.

در برخی مثال‌ها، سعی شده است که صورت مسئله تا حدی شبیه یک مسئله واقعی باشد. در چنین مثال‌هایی فهم درست صورت مسئله و تبدیل درست آن به یک مسئلهٔ احتمال و تشخیص پیشامدهای مورد بحث و نام‌گذاری مناسب، بخشی از حل مسئله است و شما باید این کار را هم به‌خوبی فرا بگیرید.

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبهٔ ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود :

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A)>0$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

این قانون را به شکل $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ نیز می‌توان نوشت و معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

مثال : در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۴ گوی قرمز است. از آن دو گوی به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد چقدر است؟

حل : برای حل این مثال گیریم A پیشامد سبز بودن گوی اول و B سفید بودن گوی دوم باشد. در این صورت آنچه خواسته

شده $P(A\cap B)$ است. با توجه به قانون ضرب احتمال باید $P(A)$ و $P(B|A)$ را به دست آوریم :

$$P(A)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B|A)=\frac{۳}{۵}$$

و در نتیجه $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=۰/۱$.

قانون ضرب احتمال را می‌توان به‌راحتی برای سه پیشامد نیز نوشت :

اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند آن‌گاه

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P\big(A_۳|(A_۱\cap A_۲)\big)$$

در یکی از تمرین‌های آخر درس از شما خواسته شده تا این قانون را ثابت کنید.

کار در کلاس

با داده‌های مثال قبل، اگر سه توپ را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

حل : قسمتی از راه حل مشابه مثال قبل است. کافی است C قرمز بودن گوی سوم بگیریم و در این صورت باید $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد راه حل را ادامه دهید.

کار در کلاس

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد گل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به‌علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، در اولین پرتاب روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب اول، دقیقاً دو پرتابش گل شود چقدر است؟ (تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال با ویلچر کشورمان در بازی‌های پارالمپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳ آلمان را شکست داد).

برای حل این مسئله پیشامد گل شدن پرتاب iم را A_i بنامید. آن‌چه باید محاسبه کنید برابر است با :

$$P\big((A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)\cup(A_۱\cap A'_۲\cap A_۳)\cap(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)\big)$$

سه پیشامدی که در این عبارت احتمال اجتماع آنها مد نظر است، دوبه‌دو ناسازگار هستند، پس می‌توان نوشت

$$P\big((A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)\cup(A_۱\cap A'_۲\cap A_۳)\cap(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)\big)=P(A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)+\cdots$$

برای محاسبهٔ عبارات مورد نیاز باید از قانون ضرب استفاده کنید.

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(\cdots|\cdots\cdots)=۰/۸\times\cdots\times\cdots=\cdots$$

$$P(A_۱\cap A'_۲\cap A_۳)=P(\cdots)P(\cdots|\cdots)P(\cdots|\cdots\cdots)=\cdots\times\cdots\times\cdots=\cdots$$

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)=\cdots$$

و در نتیجه احتمال خواسته‌شده برابر است با . . .

مثال : فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و دو روی کارت سوم یکی سبز و دیگری قرمز است. کارتی را به‌تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید پیشامد A یعنی کارت دو رو سبز است و پیشامد B روی مشاهده شدهٔ کارت انتخابی سبز است. باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را، با احتمال‌های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم :

$$P(B)=\frac{۱}{۲}$$

احتمال پیشامد $A\cap B$ را به‌راحتی می‌توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $P(A\,|\,B)=\frac{۲}{۳}$. ش

قانون احتمال کل

رسیدن از داده‌های جزئی به نتایج کلی بسیار معمول است. مثلاً اطلاعاتی آماری که در استان‌های مختلف تهیه شده می‌تواند بعد از انجام برخی محاسبات منجر به آمارهایی در مورد کل کشور شود. یا اطلاعاتی در مورد رفتار ترافیکی گروه‌های مختلف سنی و جنسی را می‌توان جمع‌بندی کرد و به آماری در مورد کل رانندگان رسید. موضوع قانون احتمال کل چنین چیزهایی است.

فعالیت

فرض کنید کلاس‌های یازدهم ۱۱/۱، ۱۱/۲ و ۱۱/۳ به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. طبق گزارش نمایندهٔ هر کلاس، در این سه کلاس، به‌ترتیب، ۲۵ درصد، ۳۳/۳ درصد و ۲۰ درصد در یکی از تیم‌های ورزشی مدرسه عضو هستند.

۱ در هر یک از این سه کلاس چند دانش‌آموز در یکی از تیم‌های ورزشی مدرسه عضو هستند؟

۲ یکی از دانش‌آموزان کلاس یازدهم را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه او عضو یکی از تیم‌های ورزشی مدرسه باشد چقدر است؟

در برخی از مسائل علم احتمال، مانند آنچه در فعالیت قبل دیدید، آنچه به عنوان داده مسئله موجود است، اطلاعاتی جزئی است و آنچه از ما خواسته می‌شود، به‌نوعی، یک جمع‌بندی کلی است. «قانون احتمال کل»، که در ادامه معرفی خواهد شد، ابزاری برای حل چنین مسائلی است.

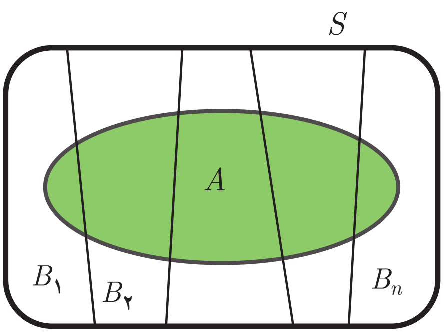
فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

در فعالیت «دانش‌آموزان کلاس یازدهم و تیم‌های ورزشی»، فضای نمونه، یعنی مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس یازدهم، به سه پیشامد یعنی عضویت در کلاس‌های ۱۱/۱، ۱۱/۲ و ۱۱/۳ بود، افزار شده بود و مسئله کلی مورد بحث احتمال عضویت یک دانش‌آموز کلاس یازدهم در یکی از تیم‌های ورزشی مدرسه است.

کار در کلاس

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :



۱ این فرض که B_1، B_2، ... و B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند یعنی دو به دو .... هستند و ... = $\bigcup_{k=1}^{n}B_k$.

۲ در این صورت $A\cap B_1$، $A\cap B_2$، ... و $A\cap B_n$ دو به دو .... هستند و اجتماع آنها برابر ...... می‌شود. در نتیجه داریم

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(...\cap...)$$

۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنیم، به قانون احتمال کل می‌رسیم.

کار در کلاس

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از این میوه‌فروشی می‌خریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

برای حل این مسئله گیریم B_1، B_2 و B_3، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد A را نیز لکه‌دار بودن آن سیب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم :

$P(B_1)=...$,　　$P(B_2)=...$,　　$P(B_3)=...$

و

$P(A|B_1)=...$,　　$P(A|B_2)=...$,　　$P(A|B_3)=...$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(A)$ است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+\qquad+\qquad=\quad+\quad+\quad=$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند، لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=2$ به شکل زیر بیان می‌شود :

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0<P(B)<1$. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

واضح است که $P(A|B)=1$ و $P(A|B')=0/5$ و با توجه به تعداد دو نوع کارت داریم $P(B)=0/2$ و $P(B')=0/8$. پس

$$P(A)=0/2\times1+0/8\times0/5=0/6$$

قانون بیز

قانون بیز، که از مهم‌ترین قوانین در علم احتمال و آمار است، صورت‌بندی احتمالاتی «کسب تجربه» و «تغییر نظر بر اثر مشاهده» است. مثلاً وقتی شما برای اولین‌بار با فردی آشنا می‌شوید، پیش‌فرض‌هایی از میزان صداقت او دارید. در طول زمان که اعمال و رفتار او را می‌بینید این پیش‌فرض‌ها به شکل مثبت یا منفی تغییر می‌کند. اگر مربی ورزش دانش‌آموزی را تحت نظر بگیرد، در ابتدا نسبت به توانایی او در ضربه زدن به توپ پیش‌فرض‌هایی دارد و هر چه بازی او را مشاهده کند، این پیش‌فرض‌ها تغییر می‌کند.

خواندنی

توماس بیز[1] آماردان، فیلسوف و کشیش انگلیسی است که به دلیل فرمول‌بندی حالت خاصی از قانون بیز، معروف شده است. او البته هیچ‌گاه کارهایی که در نهایت منجر به قانون بیز شد را منتشر نکرد، بلکه بعد از مرگش ریچارد پرایس[2]، فیلسوف و ریاضی‌دان اهل ولز پس از ویرایش یادداشت‌های بیز آنها را منتشر کرد.

۱ــ Thomas Bayes (۱۷۶۱ ــ ۱۷۰۲)

۲ــ Richard Price (۱۷۹۱ ــ ۱۷۲۳)

فعالیت

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دار هستند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است.

احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟

به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است یا کاهش؟

در علم احتمال گاهی با مسائلی مواجه هستیم که در آنها وقوع یک پیشامد، موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. شما در زندگی با این نوع مسائل، البته با نگاهی کیفی و نادقیق، مواجه بوده‌اید. مثلاً اگر شما خودرویی را ببینید که در کنار خیابان ناشیانه پارک شده است، در مورد تازه‌کار بودن رانندهٔ آن مانند قبل از این مشاهده فکر نمی‌کنید بلکه احتمالی که برای تازه‌کار بودن راننده در ذهن داشته‌اید افزایش می‌یابد.

قانون بیز، که از مهم‌ترین فرمول‌ها در علم احتمال است، برای حل چنین مسائلی است. این فرمول مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید B_1، B_2، و ... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ داده پیشامد A، به $P(B_i|A)$ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل پیچیده‌تر زیر می‌نویسند:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ها و $P(A|B_k)$ها هستند. توجه کنید که آنچه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$ است.

ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که n برابر ۲ باشد. در این‌صورت B_1 و B_2 دو پیشامد مکمل هستند.

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')}$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که آن رو قرمز است. احتمال اینکه کارت انتخاب‌شده دو رو قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. با توجه به اینکه B و B' فضای نمونه را افراز می‌کنند داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

و طبق قانون بیز

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{۰/۲\times۱}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب، داریم. سیب‌های صندوق اول سبز، سیب‌های صندوق دوم قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم این صندوق شامل سیب سبز است، احتمال اینکه همهٔ سیب‌های آن سبز باشد چقدر است؟

ب) فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همهٔ سیب‌های صندوق سبز باشد چقدر است؟

حل : قبل از اینکه به‌طور دقیق مثال را حل کنیم ابتدا به‌طور شهودی به آن فکر کنید : آیا مشاهدات در دو قسمت الف و ب مشابه است؟ در قسمت الف واضح است که گزارهٔ «این صندوق شامل سیب سبز است» فقط موجب می‌شود که بفهمیم با یکی از دو صندوق اول و سوم طرف هستیم و در نتیجه پاسخ قسمت الف $\frac{۱}{۲}$.

ولی وقتی مشاهدهٔ ب رخ می‌دهد، آیا دو صندوق اول و سوم به‌طور شهودی هم‌احتمال هستند؟ آیا اینکه صندوق سوم را انتخاب کرده باشیم و سیب انتخابی یکی از ۲ سیب سبز در بین ۱۰۰ سیب باشد کمی بعید نیست؟

اکنون به حل دقیق قسمت ب می‌پردازیم. فرض کنید پیشامد A یعنی سیب مشاهده‌شده سبز باشد و پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ به‌ترتیب به معنی انتخاب صندوق‌های اول، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_۱)=P(B_۲)=P(B_۳)=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(A|B_۱)=۱\ ,\qquad P(A|B_۲)=۰\ ,\qquad P(A|B_۳)=\frac{۲}{۱۰۰}=۰/۰۲$$

برای محاسبهٔ $P(B_۱|A)$ ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

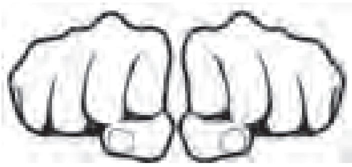
$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times۰/۰۲=۰/۳۴$$

در نتیجه

$$P(B_۱|A)=\frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۰/۳۴}=\frac{۱}{۱/۰۲}\cong۰/۹۸۰۴$$

مثال بعدی به‌خوبی نشان می‌دهد چگونه کسب تجربه موجب تغییر نگرش ما می‌شود و قانون بیز کمک می‌کند که این موضوع را با عدد توضیح دهیم.

مثال : حنانه ادعا کرده است که توانایی خاصی در بازی گل یا پوچ دارد و می‌تواند با دقت در دست طرف مقابل، به احتمال ۸۰ درصد، مشت پوچ را مشخص کند! شما در ابتدا تصور می‌کنید او به احتمال ۹۰ درصد توانایی خاصی ندارد و کاملاً شانسی بازی می‌کند و به احتمال ۱۰ درصد راست می‌گوید. تصمیم می‌گیرید برای آزمودن ادعایش، چند مرتبه با او بازی کنید.



الف) در ابتدا شما چقدر احتمال می‌دهید که حنانه در بازی اول مشت پوچ را مشخص کند؟

ب) از نظر شما احتمال اینکه در هر ۵ بازی اول حنانه درست جواب دهد چقدر است؟

حل : الف) پیشامد راست بودن ادعای حنانه را B و پیشامد درست حدس زدن او در اولین گل یا پوچ را A می‌نامیم. در این صورت با استفاده از قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۱\times ۰/۸+۰/۹\times ۰/۵ = ۰/۵۳$$

توجه داشته باشید که $P(A|B')=۰/۵$ چون اگر حنانه توانایی خاصی در یافتن دست پوچ نداشته باشد، یکی از دو دست را به عنوان دست پوچ اعلام می‌کند و به احتمال پنجاه درصد حدسش درست خواهد بود.

ب) برای حل این قسمت C را این پیشامد می‌گیریم که حنانه در ۵ بازی اول درست حدس بزند. در این صورت

$$P(C)=P(B)P(C|B)+P(B')P(C|B')=۰/۱\times ۰/۸^{۵}+۰/۹\times ۰/۵^{۵} \cong ۰/۰۶$$

کار در کلاس

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دار هستند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حل این مسأله این پیشامد که سیب انتخابی لکه‌دار باشد را با A و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشد را به‌ترتیب با $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ نمایش دهید.

در صورت مسئله چه احتمال‌هایی مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم :

$P(B_۱)=\dots$, $P(B_۲)=\dots$, $P(B_۳)=\dots$

و

$P(A|B_۱)=\dots$, $P(A|B_۲)=\dots$, $P(A|B_۳)=\dots$

آن‌چه در مسئله از ما خواسته شده است $P(B_۱|A)$ است. ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+ \qquad +$$

در نتیجه

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=...$$

کار در کلاس

قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i|A)\stackrel{?}{=}\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید تا درستی آن را ببینید.

کار در کلاس

در یک کارخانهٔ تولید شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها **۲** درصد از پاکت‌ها کمتر **۲۹۷** سی‌سی شیر دارند ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید، که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است پس از یک ماه، یک درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به‌طور کامل سرویس کرده است.

مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که حاوی کمتر از **۲۹۷** سی‌سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

با نام‌گذاری مناسب به بیان خلاصه‌ای از مسئله برسید :

گیریم B پیشامد معیوب بودن آن قطعه باشد و A این پیشامد که پاکت انتخابی کمتر از **۲۹۷** سی‌سی شیر داشته باشد. در این صورت داده‌های مسئله این‌هاست :

$P(B)=\cdots\cdots\cdots$

$P(A|B)=\cdots\cdots$

$P(A|B')=\cdots\cdots$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است، $P(B|A)$ است. لذا

$$P(B|A)=\frac{P(B)\times.......}{P(B)\times.......+P(B')\times.......}=.......$$

تمرین

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»

در این طرح سیزده مرکز، مسئولیت معاینهٔ فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه‌کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه‌کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۳ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۵۰ درصد زنان بزرگسال و ۸۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی‌نامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۴ دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به‌طور تصادفی برداشته و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۵ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۶ در دو جعبه به‌ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از

هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به‌تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۷ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

۸ احتمال مبتلا به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۹ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه هستند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۱۰ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب با احتمال‌های ۰/۴ و ۰/۳ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۱ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی هستند که به‌ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده ولی هنوز حاوی غلط است. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۲ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۳ یک شرکت بیمه، بیمه‌گذاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گذاران پرخطر هستند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گذار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گذار در سال گذشته تصادف کرده باشد احتمال اینکه جزو گروه پرخطر باشدچقدر است؟

۱۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید.

۱۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۱۶ با فرض شرایط قانون احتمال کل ثابت کنید:

$$min\ \{P(A|B_1), \dots , P(A|B_n)\} \leq P(A) \leq max\ \{P(A|B_1), \dots , P(A|B_n)\}$$

۱۷ فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) < P(A|C)$. ثابت کنید

$$P(A|B) < P\big(A|(B\cup C)\big) < P(A|C)$$

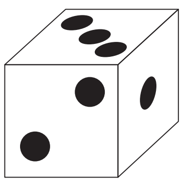
۲ احتمال غیر هم‌شانس

نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد. مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس مشاهده هرکدام از اعداد با یکدیگر برابر هستند ولی در مسابقه‌های گروهی، شانس قهرمانی تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام‌جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شانس قهرمانی تیم‌ها به‌صورت زیر مشخص شده بود :

تیم	برزیل	آرژانتین	آلمانی	اسپانیا	بلژیک	فرانسه	کلمبیا	هلند	بقیه تیم‌ها
احتمال قهرمانی	۰/۲۵	۰/۱۸۱	۰/۱۶۶	۰/۱۲۵	۰/۰۶۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۷۹

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحله نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول بالا بودند.
دنیای پیرامون ما سرشار از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به‌نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

فعالیت



در یک مکعب، روی سه وجه آن عدد ۱ نوشته شده است. همچنین عدد ۲ روی دو وجه و عدد ۳ روی وجه باقی مانده قرار گرفته است. اگر این مکعب به هوا پرتاب شود،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S = \{\dots, \dots, \dots\}$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این مکعب قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به‌دست آورید.

$$A = \{۱\} \Rightarrow P(A) = \frac{\dots}{\dots}$$

آیا می‌توانید از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را **یک پیشامد ساده** می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به‌جای، $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از مکعب که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده‌اند، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B = \{۲\}$ و $C = \{۳\}$ را به‌دست آورید.

$$P(۱) = \frac{\dots}{\dots} \quad , \quad P(۲) = \frac{\dots}{\dots}$$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) = \dots + \dots + \dots = \dots$$

۶ اگر $D = \{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱) + P(۲)$ مقایسه کنید. همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با **احتمال غیرهم‌شانس** می‌گوییم.

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرار هستند :

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم :

۱ $\circ \le P(A) \le ۱$

۲ $P(S) = ۱$

۳ $P(A) = P(a_۱) + P(a_۲) + \dots + P(a_k)$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم :

$$P(S) = P(a_۱) + P(a_۲) + \dots + P(a_n) = ۱$$

مثال : در یک مسابقه چهارجانبه فوتبال، تیم‌های c, b, a و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های b, a و c با

یکدیگر برابر باشند ولی احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر هریک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال قهرمانی تیم a، x باشد، یعنی $P(a) = x$. از آنجایی که شانس قهرمانی تیم‌های b, a و c برابرند، پس $P(b) = P(c) = x$ از سوی دیگر احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس $P(d) = ۲P(a) = ۲x$. با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله $S = \{a, b, c, d\}$ است، بنابراین

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱$$

با جای‌گذاری احتمال‌های بالا برحسب x، به تساوی $x + x + x + ۲x = ۱$ می‌رسیم. پس $۵x = ۱$ و در نتیجه $x = \frac{۱}{۵}$. بنابراین احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها عبارت است از $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{۱}{۵}$ و $P(d) = \frac{۲}{۵}$.

کار در کلاس

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\}) = \frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\}) = \frac{۱}{۲}$، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه y, x و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند، بنابراین $P(x) + P(y) + P(z) = ۱$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x, y\}) = \frac{۲}{۳}$، پس $P(x) + P(y) = \frac{۲}{۳}$، بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z) = \frac{...}{...}$.

از سوی دیگر، $P(\{x, z\}) = \frac{۱}{۲}$، پس $P(x) + P(z) = \frac{۱}{۲}$. از قراردادن $P(z) = \frac{۱}{۳}$ در این تساوی $P(x) = \frac{...}{...}$ به‌دست می‌آید.

اکنون این مقدار را در تساوی $P(x) + P(y) = \frac{۲}{۳}$ قرار دهید و مقدار P(y) را به‌دست آورید: $P(y) = \frac{...}{...}$.

۲ یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

در این سؤال، $P(a) = ۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱) = P(۳) = ...$ و همچنین $P(۲) = P(۴) = ...$. (چرا؟) بنابراین اگر $P(۱) = r$، سپس $P(۲) = ۳r$. از رابطه زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده برحسب r، مقدار r را به‌دست آورید.

$$P(S) = ۱ \Rightarrow P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$
$$\Rightarrow r + ۳r + ... + ... + ... + ... = ۱$$
$$\Rightarrow r = ...$$

اکنون با محاسبه P(۲) و P(۳) می‌توانید $P(\{۲, ۳\})$ را تعیین کنید.

$$P(\{۲, ۳\}) = ... + ... = ...$$

تمرین

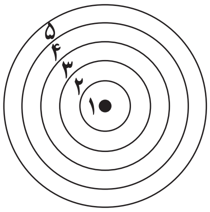
۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، شانس آمدن «رو» نصف شانس آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

۳ اگر $S=\{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a, b\}$ ، $B=\{a, b, c, d\}$ و $C=\{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

۴ در یک تجربه تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق زیر که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[۱]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، r باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه k ام، $(۲k-۱)r$ باشد،



۱ــ احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

۲ــ احتمال اصابت دارت به سه ناحیه اول، سوم و چهارم بیشتر است یا اصابت به دو ناحیه دوم و پنجم؟

۱ــ مرز بیرونی هر ناحیه را جزء آن ناحیه محسوب کنید.

۳ آمار توصیفی

۱ توصیف و نمایش داده‌ها

بعد از گردآوری داده‌ها، به تنظیم، رده‌بندی و خلاصه کردن آنها می‌پردازیم. به این منظور می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود :

الف) تنظیم وطبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول به نام جدول فراوانی

ب) رسم کردن نمودارهای مختلف براساس مقادیر جدول فراوانی

فعالیت

یک راننده تاکسی در یک روز اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند.

او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما او را کمک کنید تا این کار را انجام دهد.

۱ ابتدا به هرنوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.

۲ سپس به شمارش اسکناس‌ها پرداخته و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.

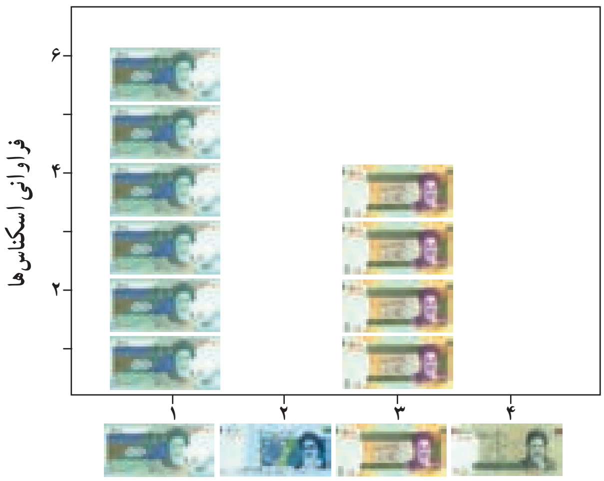
۳ در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کرده و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

۴ با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ده هزار تومانی، چند درصد هزار تومانی، چند درصد پنج هزار تومانی و چند درصد از اسکناس‌ها ده هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس	$\frac{\text{فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس}}{\text{تعداد کل اسکناس‌ها}}$
	۱	۶	$\frac{۶}{۲۰}$
	۲		۰/۱۵
	۳	۴	
	۴		۰/۳۵
تعداد کل اسکناس‌ها		۲۰	

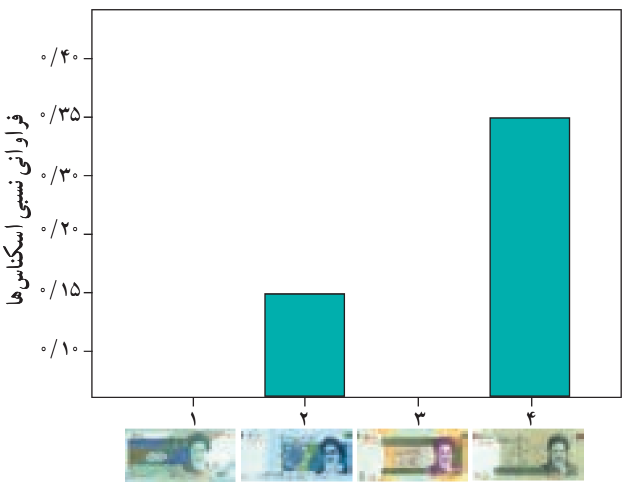
حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و ج نشان دهیم.

۱ــ در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده تعداد تکرار اسکناس‌ها یا فراوانی اسکناس‌ها و محورافقی نشان‌دهنده نوع اسکناس‌ها باشد. در این نمودار، اسکناس‌های هزار و پنج هزار تومانی روی هم قرار گرفته‌اند. شما هم اسکناس‌های دو هزار تومانی را به صورت $\boxed{۲}$ و اسکناس‌های ده هزار تومانی را به صورت $\boxed{۱۰}$ در نمودار قرارداده و آن را کامل کنید.



نمودار الف

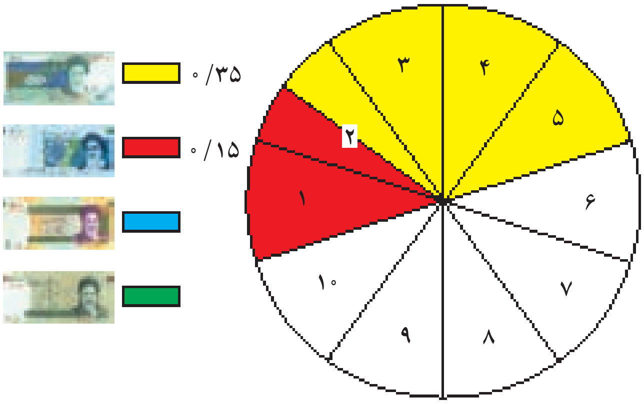
۲ــ در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان دهنده نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی اسکناس‌ها و محورافقی نشان دهنده نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های هزار وپنج هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.



نمودار ب

۳ــ اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟

۴ــ برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان دهنده ۱۰ درصد کل دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی مربوط به اسکناس ده هزار تومانی در ستون چهارم، قسمت اول دایره و نصف قسمت دوم دایره رنگ قرمز شده است که معادل ۱۵ درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس دو هزار تومانی سه قسمت دایره به‌علاوه نصف قسمت دوم رنگ زرد می‌شود که معادل ۳۵ درصد کل دایره است. برای اسکناس‌های هزار و پنج هزار تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید؟



نمودار پ

داده‌ها : واقعیت‌هایی دربارۀ یک شی یا فرد هستند که در محاسبه، استنباط، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.

متغیر : هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گویند و عددی که به آن ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر یا مشاهده می‌گویند.

فراوانی یک داده : تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

فراوانی نسبی یک داده : با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده به‌دست می‌آید. اگر فراوانی نسبی داده‌ها در ۱۰۰ ضرب شود آنگاه درصد داده‌ها به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می‌کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی هستند که در قطار موسیقی گوش می‌دهند.
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی هستند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند.
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی هستند که در قطار مطالعه می‌کنند.

■ افرادی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی هستند که در قطار خوابیده‌اند.

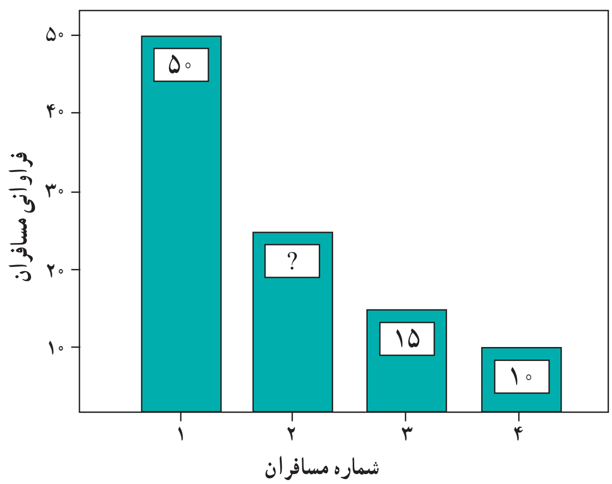
شکل ت

جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید؟

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که موسیقی گوش می‌دهند	۱	۵۰	
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲		۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	
مسافرانی که خوابیده‌اند	۴		۰/۱۰
تعداد کل مسافران		۱۰۰	

همچنین نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید؟ نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید؟



فعالیت

سالهاست با مسئله آلودگی هوا آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه‌های مهم تبدیل شده است.

شاخص کیفیت هوا[1] (AQI)، متغیری پیوسته برای بیان کیفیت روزانه هوا است. شاخص کیفیت هوا، برای شش آلاینده اصلی هوا شامل مونواکسید کربن، ازن، دی‌اکسید گوگرد، دی‌اکسیدنیتروژن و میزان ذرات معلق درهوا سنجیده می‌شود.

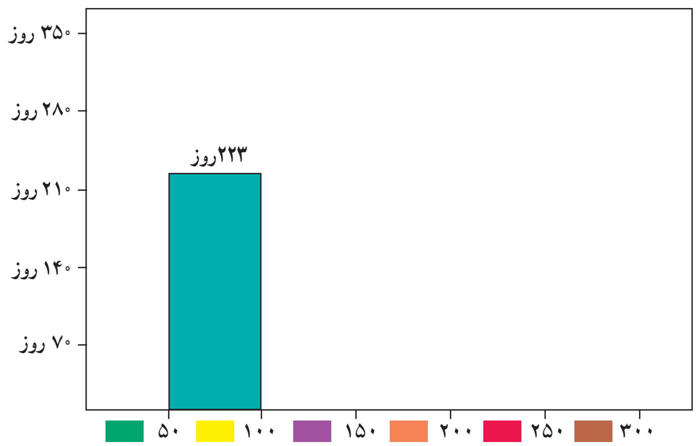
	آلاینده	تأثیر بهداشتی	منبع انتشار
O_3	ازن	کاهش عملکرد ریه و افزایش علائم تنفسی مانند سرفه، تنگی نفس، تشدید آسم و سایر بیماری‌های ریوی، افزایش استفاده از دارو، مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و مرگ‌ومیر زودرس	این آلاینده ثانویه در اثر واکنش شیمیایی ترکیبات آلی فرار و اکسیدهای نیتروژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.
$PM_{2.5}$ PM_{10}	ذرات معلق	مواجهه کوتاه مدت با این آلاینده می‌تواند منجر به تشدید علائم بیماری‌های قلبی ریوی و علائم تنفسی، افزایش نیاز به استفاده از دارو و پذیرش بیمارستانی گردد. مواجهه طولانی مدت عامل مرگ‌ومیر زودرس و تشدید بیماری‌های قلبی و ریوی است.	ذرات معلق در اثرانتشار مستقیم و یا واکنش‌های شیمیایی ایجاد می‌شوند. عمده‌ترین منابع انتشار این آلاینده شامل احتراق سوخت (مانند سوزاندن زغال سنگ، چوب و سوخت دیزل)، فرایندهای صنعتی، کشاورزی و انتشار از جاده، خودروها (اگزوز، لنت، لاستیک و ...) می‌باشند.
NO_2	دی‌اکسید نیتروژن	تشدید بیماری‌های ریوی، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و افزایش آسیب‌پذیری و استعداد ابتلا به عفونت‌های ریوی	احتراق سوخت (از وسایل نقلیه، واحدهای تولید برق، صنایع، بویلرها و همچنین سوزاندن چوب)
CO	مونواکسید کربن	کاهش اکسیژن‌رسانی به بافت‌ها و اندام‌های مختلف بدن، تشدید بیماری‌های قلبی و درد قفسه سینه، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی	احتراق سوخت (به خصوص در وسایل نقلیه موتوری)
SO_2	دی‌اکسید گوگرد	تشدید آسم و افزایش علائم تنفسی، کمک به شکل‌گیری و تشدید علائم و اثرات بیماری‌های ریوی	احتراق سوخت (به‌ویژه سوخت‌های با گوگرد بالا)، فرایندهای تولید برق و صنایع، منابع طبیعی مانند آتشفشان

[1] Air Quality Index

اطلاعات تکمیلی و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا[1] قابل دسترسی است میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گردآوری شده است.

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$۰ \le AQI \le ۵۰$	۱۶	
سالم	$۵۰ < AQI \le ۱۰۰$	۲۳۳	
ناسالم برای گروه‌های حساس	$۱۰۰ < AQI \le ۱۵۰$	۱۱۲	
ناسالم	$۱۵۰ < AQI \le ۲۰۰$	۴	
بسیار ناسالم	$۲۰۰ < AQI \le ۲۵۰$	۱۰	
خطرناک	$۲۵۰ < AQI \le ۳۰۰$	۰	
تعداد کل روزهای یک سال		۳۶۵	

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



- نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آلودگی هوا رسم کنید.
- چند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟
- چند درصد روزهای سال دارای هوای ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟
- کدام نمودار، در پاسخ دادن به سؤالات، ما راحت‌تر کمک می‌کند؟

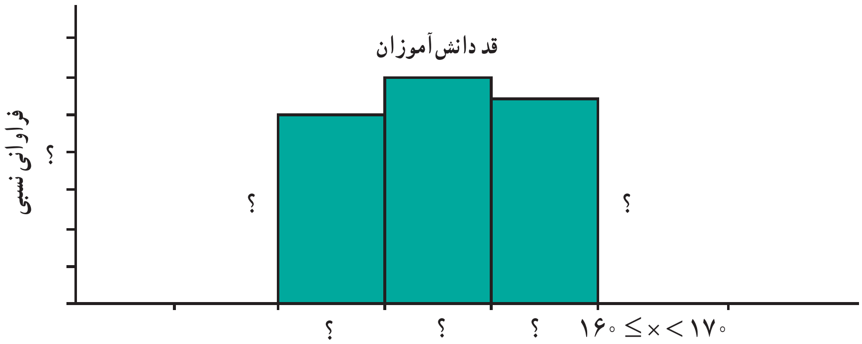
۱ــ http: //air.tehran.ir

کار در کلاس

جدول فراوانی زیر مربوط به قد (H) ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

قد دانش‌آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی
۱۲۰ ≤ H < ۱۳۰	۳	
۱۳۰ ≤ H < ۱۴۰	۱۰	
۱۴۰ ≤ H < ۱۵۰	۱۳	
۱۵۰ ≤ H < ۱۶۰	۱۱	
۱۶۰ ≤ H < ۱۷۰	۱۰	
۱۷۰ ≤ H < ۱۸۰	؟	
مجموع	۵۰	

بر اساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت مربوط به فراوانی نسبی قد دانش‌آموزان را رسم کنید؟



قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر است؟ همچنین قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی‌متر است؟

تمرین

۱ داده‌های زیر، مسافتی که ۲۰ راننده برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند را نشان می‌دهد. این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	
از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	
از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	
از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	
از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	
از ۳۰/۵کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	
از ۳۵/۵کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	
مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است : ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ هر دو ☐

۳ جملات زیر را کامل کنید :

الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار.............. استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی وهمچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰/۴ باشد و مجموع فراوانی‌ها همه گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

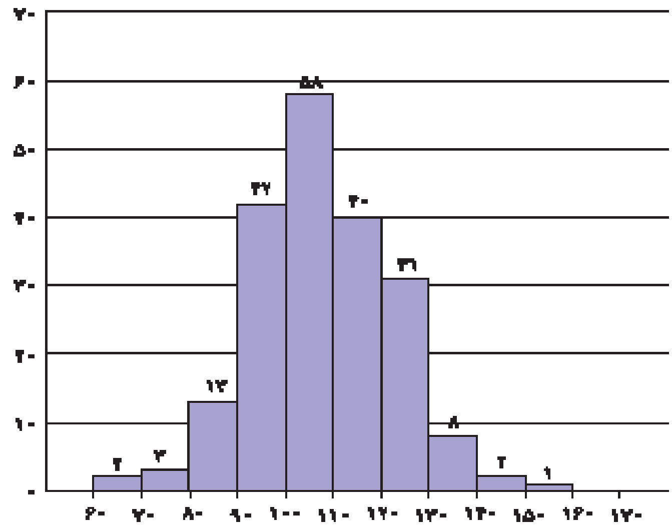
۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید؟



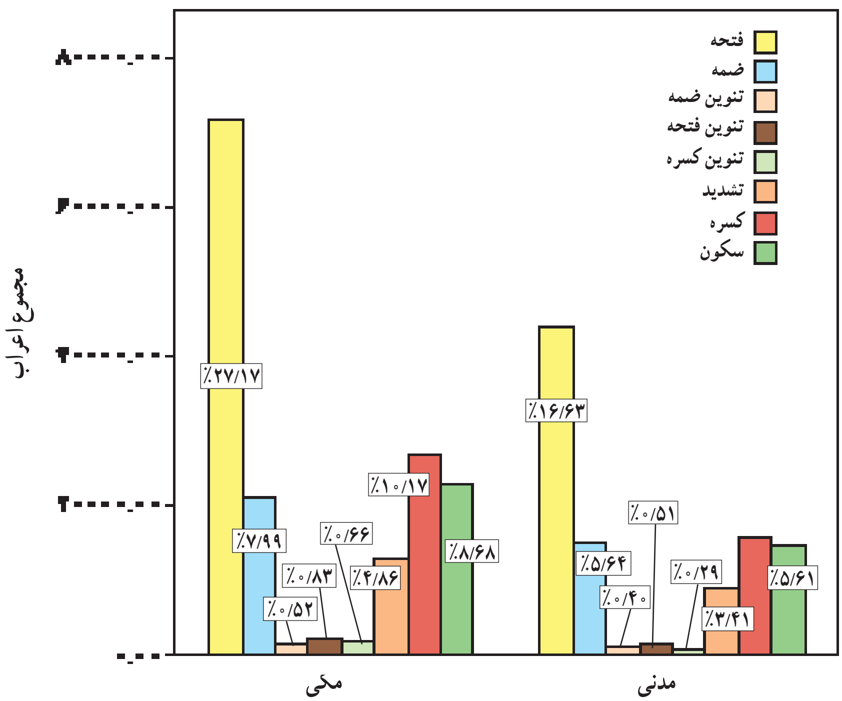
۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف آیهٔ شریفهٔ

«انا انزلناه قرآنا عربیا لعلکم تعقلون»

را به‌دست آورید؟ برای پاسخ به این سؤال کاربرد آمار در علوم قرآنی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در علوم قرآنی

قرآن معجزهٔ پیامبر اعظم است که در چارچوب زمان و مکان نمی‌گنجد. انسان در طول زندگی خود همواره برای رسیدن به سعادت و کمال به آن نیازمند است. در این کتاب آسمانی اعجاز شگرفی نهفته است که بعد از ۱۴۰۰ سال از زمان نزول آن کشف می‌گردد. برخی از این اعجاز، اعجاز آماری است و این موضوع سبب گشته که بسیاری از متخصصان و قرآن‌پژوهان به دنبال کشف این اعجاز باشند. در شکل زیر، نمودار مربوط به فراوانی نسبی تعداد هریک از اعراب مورد استفاده در سوره‌های مکی و مدنی رسم شده است



۲ معیارهای گرایش به مرکز

الف) میانگین داده‌ها

فعالیت

در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد، که میزان محصولات انواع گردوها برحسب تعداد به شرح زیر است :

نوع گردو	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰

الف) متوسط تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟

حال اگر علاوه‌بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند :

نوع	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰
تعداد از هر نوع درخت	۱۰	۵	۷	۳

ب) آیا می‌توان متوسط تعداد گردوی تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان متوسط گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت گردو در نظر گرفت؟

پ) متوسط گردوی تولید شده در این حالت به چه صورت است؟

مجموع داده‌ها : اگر n دادهٔ x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n ، داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما (Σ) نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

و عبارت $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ، سیگمای i از ۱ تا n، x_i می‌خوانیم.

میانگین یا معدل داده‌ها : میانگین یا معدل داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها : اگر، n، دادهٔ x_1، x_2، . . . ، x_n، داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها دارای تعداد تکرار w_1، w_2، . . . ، w_n هستند که به هر یک از آنها وزن داده متناظر با آن می‌گوییم. میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

کار در کلاس

دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامهٔ آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	تعلیمات دینی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

الف) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید؟

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=۱}^{۶} w_i x_i}{\sum_{i=۱}^{۶} w_i} = \frac{۴\times۷۱+۳\times۶۵+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots}{۴+۳+\ldots+\ldots+\ldots+}$$

پ) کدام متوسط مناسب است؟

ب) میانه داده‌ها

فعالیت

در شکل الف افرادی را به ترتیب قد، در یک صف مرتب کرده‌اند و داده‌های مربوط به اندازه قد آنها (برحسب سانتی‌متر)، به صورت روبه‌رو می‌باشند.

در شکل الف در بین پنج فرد، کدام فرد از نظر قد در وسط صف قرار گرفته است؟

شکل الف

حال به شکل ب توجه کنید. در بین شش فرد، کدام فرد در وسط صف قرار دارد؟

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به راحتی نمی‌توانید عدد وسط در این حالت را پیدا کنید. برای به دست آوردن عدد وسط در این حالت مراحل زیر را انجام دهید:

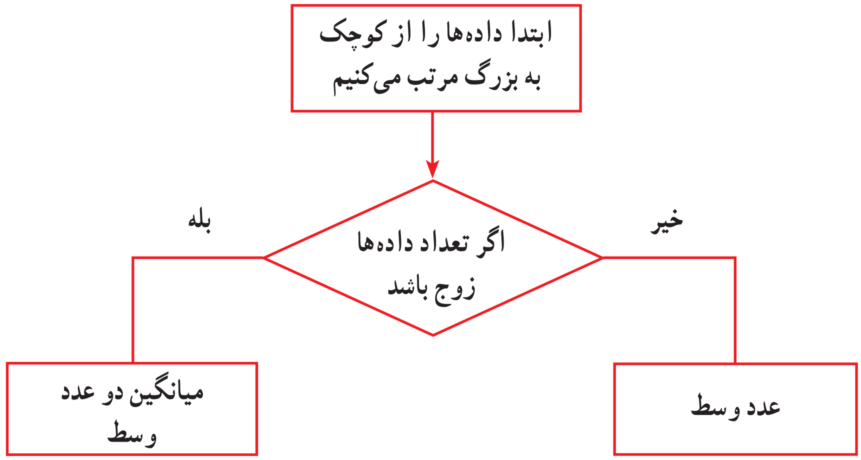
الف) دو فردی که در جایگاه وسط صف قرار گرفته‌اند را پیدا کنید.

ب) میانگین این دو عدد را به عنوان عدد وسط قد این افراد به دست آورید.

شکل ب

میانه، چارک اوّل و چارک سوم: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند را میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q2 نشان می‌دهیم. یک چهارم اول داده‌های مرتب شده را چارک اوّل داده‌ها گوییم و آن را Q1 نشان می‌دهیم. همچنین سه چهارم داده‌های مرتب شده را چارک سوم گوییم و آن را با Q3 نشان می‌دهیم.

نحوهٔ به دست آوردن میانه داده‌ها



کار در کلاس

در یک شعبه بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری دریک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد : بدهکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازه مبلغ مورد نظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به‌اندازه همان مبلغ است.

الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازه زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

۲۵	۱۲	۱۰	۸/۷	۱۰

■ میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازه زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

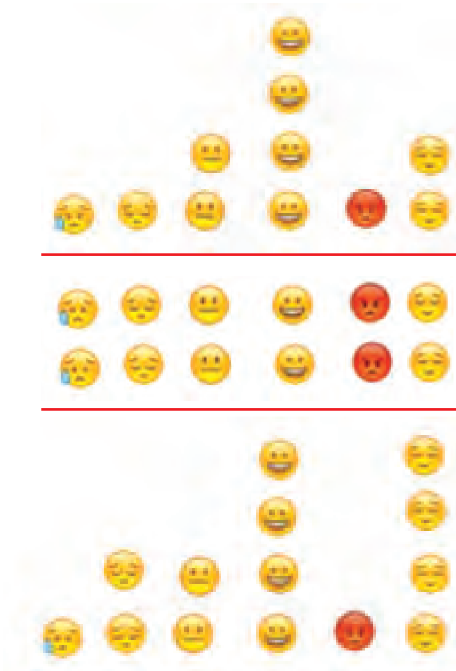
۳۴	۳۲	۲۰	۸۱/۷	۳۰	۷۰

■ در این حالت نیز میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید؟

پ) مد یا نما داده‌ها

فعالیت

به تصاویر روبه‌رو توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک‌سری از حالت‌های صورت را مشاهده می‌کنید. تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.



شکل الف

شکل ب

شکل پ

شماره صورت‌ها	انواع صورت‌ها	شکل الف	شکل ب	شکل پ
۱				
۲			۲	
۳				۲
۴			۲	
۵		۲		
۶		۱		

- درشکل الف کدام صورت بیشتر از همه تکرار شده است؟
- در شکل ب کدام صورت بیشتر از همه تکرار شده است؟
- در شکل ج کدام صورت بیشتر از همه تکرار شده است؟

مد داده‌ها : داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد مد داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همه داده‌ها دارای یک فراوانی باشند آن‌گاه این داده‌ها دارای مد نیستند. اگر در داده‌هایی، دو داده دارای بیشترین فراوانی باشند آن‌گاه این داده‌ها دارای دو مد هستند.

کار در کلاس

در یک مسابقه پرتاب دارت، سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند امتیازهای زیر به دست آمده است :

- مد نفر اول چه عددی است؟
- مد نفر دوم چه عددی است؟
- مد نفر سوم چه عددی است؟

نفر اول	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴	۷
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۵	۴	۷

میانگین، میانه و مد داده‌ها، کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟

کار در کلاس

دو کارخانه تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانه (الف)، لامپ‌های کم مصرف و کارخانه (ب)، لامپ‌های پر مصرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه‌هایشان تحقیقی انجام دهد.

بر اساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانه (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ برحسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نماید.

لامپ انتخاب شده	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (الف)	۱۷	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (ب)	۰	۱۵	۰	۱۶	۱۳

- آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (الف)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده کارخانه (الف) است؟
- به دلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانه (ب) آیا بازهم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (ب)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گرایش به مرکزی مناسب است؟
- مدیر کارخانه براساس فروش سال گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم‌مصرف با نور سفید در منازل مردم مد شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم‌مصرف بانور سفید تولید کند، کدام معیار گرایش به مرکز، برای تعداد این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟

داده دورافتاده داده‌های خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک که به آنها در آمار داده‌های دورافتاده گوییم، میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد در صورتی که تأثیری بر میانه و مد داده‌ها ندارد. در فعالیت مربوط به تعداد لامپ‌های تولیدی کارخانه (ب)، عدد صفر داده دورافتاده است.

در تفسیر و تحلیل مسایل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مد محاسبه شود و بر اساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی مورد استفاده قرار گیرد.

تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است.
میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است، معدل یا میانگین دما در هفته گذشته چه عددی است؟

۲۹، ۳۱، ۲۸، ۳۲، ۲۹، ۲۷، ۵۵

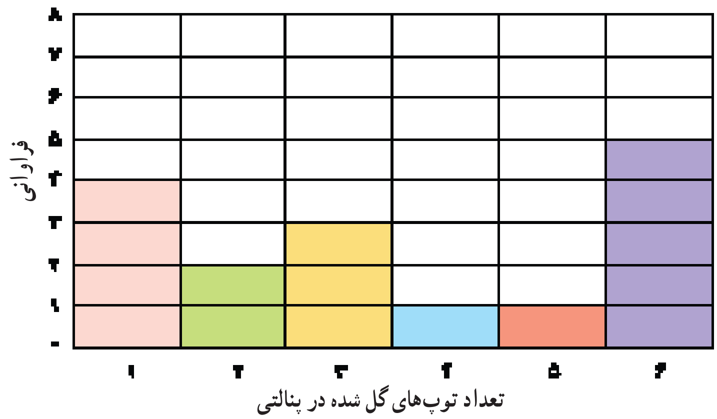
۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

الف) ۹، ۹، ۹، ۹، ۸   ب) ۳۰۰، ۲۴، ۴۰، ۵۰، ۶۰

پ) ۱۰، ۳، ۸، ۱۵   ت) ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۵

ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳   ج) ۷، ۱۳، ۴، ۷

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی هستند؟

نمرات درس ریاضی	۲۰	۱۶	۱۷	۱۹	۱۷/۵
	۱۸	؟	۱۸	۱۵	۱۶
میانگین نمرات = ۱۵/۶۵					
مد نمرات = ؟					

۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعه یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز در هفته گذشته مطالعه کرده است؟

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲ میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا این که این شرکت ضرر نکند؟

۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	تعلیمات دینی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

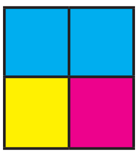
اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۵۲ باشد درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است، چنانچه دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم. میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

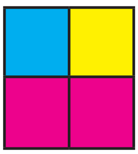
۱۰ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، ماتریس عددی این دو شکل به صورت زیر نشان داده شده است:

حال ماتریس مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای ماتریس را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. ماتریس عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.



$$\begin{pmatrix}470 & 470\\ 580 & 690\end{pmatrix}$$

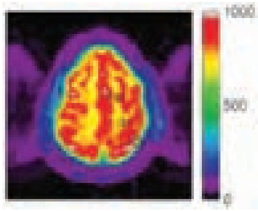


$$\begin{pmatrix}470 & 580\\ 690 & 690\end{pmatrix}$$

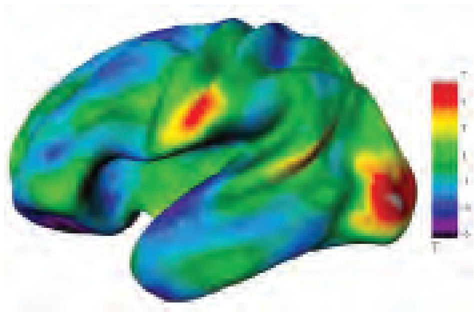
رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۷۰تا ۶۲۰
	۶۲۰تا ۷۵۰

کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز

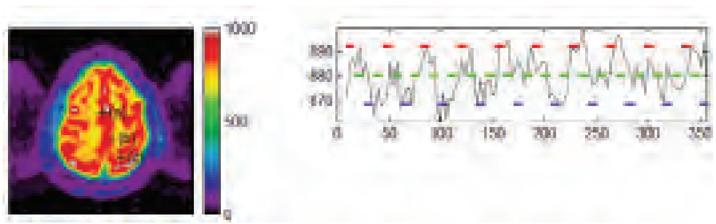
تفسیر تصاویر مغزی



امروزه آمار به عنوان یک علم پرکاربرد در همه علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال در علوم پزشکی، علم آمار در تفسیر تصاویر مغزی به منظور شناسایی تومورهای بدخیم، شناسایی عملکرد نواحی مختلف مغز در برابر کنش‌هایی مانند نور، صدا و یا حس خنده مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل زیر با میانگین تصویر مغزی ۱۰ فرد آشنا می‌شویم.



این تصویر از شکل زیر، برشی از یک تصویر مغزی است. رنگ قرمز نشان دهنده ناحیه‌ای است که درآن فشار خون بالایی وجود دارد. این ناحیه که مشکوک به وجود تومور است با استفاده از علم آمار شناسایی و محل تومور حدس زده می‌شود. به عنوان مثال نقطه a به عنوان نقطه‌ای شناخته می‌شود که با احتمال بالایی محل قرارگرفتن تومور می‌باشد ولی نقاط b و c علی‌رغم داشتن فشار خون بالا محل تومور نیستند.



۳ معیارهای پراکندگی

۱ــ انحراف معیار و واریانس داده‌ها

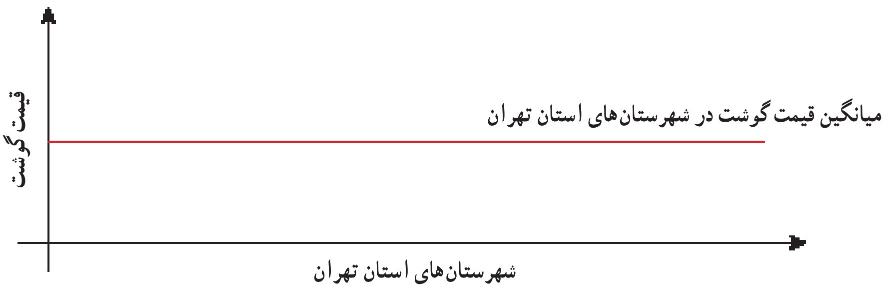
فعالیت

در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ تورم، نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند. یکی از اقلام مصرفی مورد نیاز در محاسبه نرخ تورم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول روبه‌رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان‌های استان تهران گردآوری شده است.

شهرستان‌های استان تهران	قیمت گوشت قرمز
تهران	
اسلام شهر	
دماوند	
رباط کریم	
ری	
شمیرانات	
شهریار	
فیروزکوه	
قدس	
ملارد	
پیشوا	
پاکدشت	
ورامین	

■ میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را به دست آوردید؟

■ درنمودار زیر، میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران نشان داده شده است. قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.



۱ چند نقطه بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟

۲ منظور از پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. هر چقدر نقاط یا همان قیمت گوشت قرمز در

هریک از شهرستان‌های استان تهران حول خط قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک‌تر باشند، نشان‌دهنده چیست؟ هرچقدر دورتر باشند چطور؟

۳ معیاری را برای اندازه‌گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می‌توانید معرفی کنید؟

دیدیم پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. برای معرفی معیار مناسب یک راه حل ابتدایی این است که تک تک قیمت‌ها را از میانگین‌شان کم کنیم. این تفاضل‌ها را انحراف از میانگین می‌نامیم. مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر با صفر خواهد شد و این به خاطر آن است که برخی از داده‌ها از میانگین بزرگ‌تر و برخی دیگر کوچک‌تر هستند در نتیجه مقادیر مثبت و منفی حاصل می‌شوند که مجموع آنها همدیگر را خنثی می‌کنند. برای رفع این مشکل قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. میانگین این مقادیر می‌تواند معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها باشد اما کار کردن با قدر مطلق کار آسانی نیست از این رو توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود.

نرخ تورم

در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ تورم بیان می‌شود. نرخ تورم، درصد تغییر سطح قیمت مجموعه کالاهای مصرفی مانند خوراک و پوشاک و کالاهای خدماتی مانند مسکن، آب و برق خانوارها در طول زمان را اندازه می‌گیرد.

فرض کنید متوسط قیمت مجموعه کالاهای مصرفی یک خانوار در سال a، $P_{۰}$ و متوسط قیمت همان مجموعه کالای مصرفی در سال ۱ــ a، $P_{-۱}$ باشد، در این صورت نرخ تورم در طی سال a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{نرخ تورم} = \frac{P_{۰} - P_{-۱}}{P_{-۱}} \times ۱۰۰\%$$

به عنوان مثال اگر متوسط قیمت گوشت قرمز به عنوان کالای مصرفی در سال a−۱ و a به ترتیب ۲۸ و ۳۲ هزار تومان برای هرکیلو باشد، در این صورت نرخ تورم برای قیمت گوشت قرمز در سال a برابر:

$$\text{نرخ تورم} = \frac{(۳۲-۲۸)}{۲۸} \times ۱۰۰ = ۱۴\%$$

یعنی متوسط قیمت گوشت قرمز در سال a ، ۱۴ درصد نسبت به سال گذشته افزایش یافته است.

لازم به ذکر است هر چه‌قدر نرخ تورم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کاهش پیدا می‌کند. همچنین مرکز آمار ایران برای محاسبه نرخ تورم در یک سال، متوسط قیمت ۱۰۰ قلم کالای گروه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها و ۲۵۹ قلم کالای خدماتی برای سال جاری و سال قبل آن در نظر گرفته و این نرخ را محاسبه می‌کند.

انحراف معیار : در آمار، یک معیار سنجش برای میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگین شان، **انحراف معیار** است.

انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود :

انحراف معیار داده‌ها : اگر n داده از جامعه به صورت x_1، x_2، . . . ، x_n داشته باشیم، انحراف آنها را با نماد σ نشان می دهیم، که به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i-\bar{x}$، را انحراف داده iام از میانگین داده‌ها می گویند.

واریانس داده‌ها : توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عدد کوچکی باشد بدین معنی است که پراکندگی داده‌ها حول میانگین‌شان کم و درنتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عددی بزرگ باشد بدین معنی است که پراکندگی داده‌ها حول میانگین‌شان زیاد و درنتیجه داده‌ها از هم دورتر است.

کار در کلاس

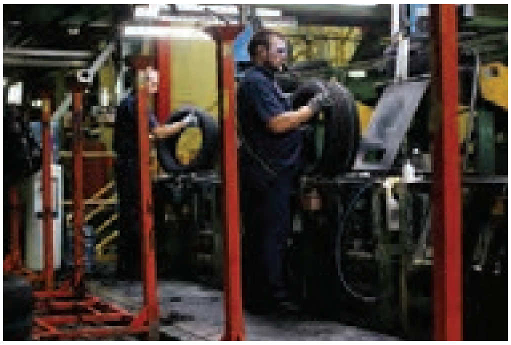
انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

قیمت گوشت قرمز	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
	σ^2	
	σ	

۲ــ ضریب تغییرات داده‌ها

فعالیت

یکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هرچقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد به این معنی است که لاستیک‌ها دارای کیفیت بالایی از نظر طول عمر هستند.



حال با توجه به مطالب گفته شده به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانه (الف) و (ب) می‌پردازیم. براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به این شرح است :

کارخانه	میانگین	انحراف معیار
کارخانه الف	۱۴۰۰۰ کیلومتر	۲۰۰۰ کیلومتر
کارخانه ب	۱۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰۰۰ کیلومتر

- شما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟
- آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟

برای پاسخ به سؤالات فوق نیاز به معرفی معیار جدیدی برای سنجش پراکندگی داده وجود دارد. این معیار را **ضریب تغییرات داده‌ها** می‌نامند.

ضریب تغییرات داده‌ها : معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر چقدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

کار در کلاس

الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۱۴۰۰۰ کیلومتر	۲۰۰۰ کیلومتر	
کارخانه ب	۱۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰۰۰ کیلومتر	

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می‌کنید؟

ب) حال با تغییر واحد اندازه‌گیری در جدول قبلی میانگین و انحراف معیارطول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۱۴۰۰۰۰۰۰ متر	۲۰۰۰۰۰۰ کیلومتر	
کارخانه ب	۱۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰۰۰ کیلومتر	

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک‌ها برای کارخانه (الف) برحسب واحد اندازه‌گیری متر و برای کارخانه (ب) برحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول زیر محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری وابسته است؟

تمرین

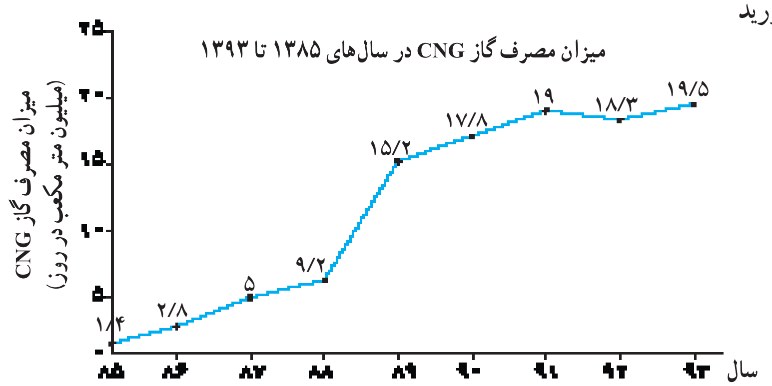
۱ فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند به صورت زیر است :

۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۰،۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سن افراد را به دست آورید.

۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید

CNG
گاز طبیعی



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول روبه‌رو به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰،۱۲،۸،۱۶،۱۰،۴،۷			
۳ ،۲ ،۱ ،۰ ،۰ ،۳- ،۲- ،۱-			
۱۰/۱۱ ،۱۱/۳۶ ،۱۰/۱۱، ۹/۸۸ ،۹/۴۲، ۹/۷۶، ۹/۶۲			
۲، ۳۰۰۰، ۲۵۰۰، ۲۰۰۰			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

نمودارهای جعبه‌ای، حبابی و راداری

در ابتدای این درس با معیارهای پراکندگی آشنا شدیم، حال می‌خواهیم با استفاده از نمودارهای آماری، معیارهای پراکندگی داده‌ها را به صورت تصویری نشان دهیم.

الف) نمودار جعبه‌ای

فعالیت

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی «الف» و «ب» برای هفت سال اندازه‌گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است:

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱

عدد ۰ در جدول به معنی این است که میزان بارش کمتر از ۱ سانتی‌متر است.

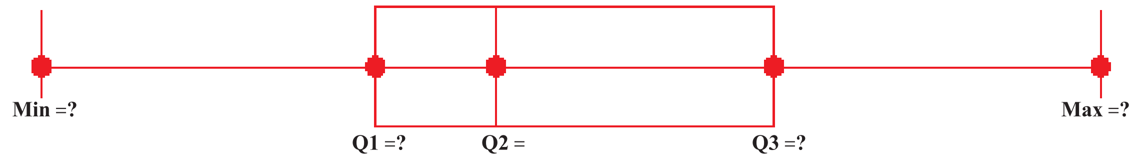
برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

سال	بیشترین مقدار میزان بارش برف Max	چارک سوم میزان بارش برف Q3	میانه میزان بارش برف Q2	چارک اول میزان بارش برف Q1	کمترین مقدار میزان بارش برف Min
پیست اسکی الف					

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می دهیم.

ج) برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می کنیم، سپس با استفاده از یک خط میانه را در جعبه مشخص می‌کنیم و در انتها، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده‌ها دو خط رسم می‌کنیم.



به این نمودار، نمودار جعبه‌ای می‌گوییم. در این نمودار چارک اول، میانه، چارک سوم، بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها و در نهایت تفاضل بین بیشترین و کمترین داده (Max−Min= دامنه) که به آن دامنه می‌گویند به‌طور هم‌زمان نشان داده می‌شود.

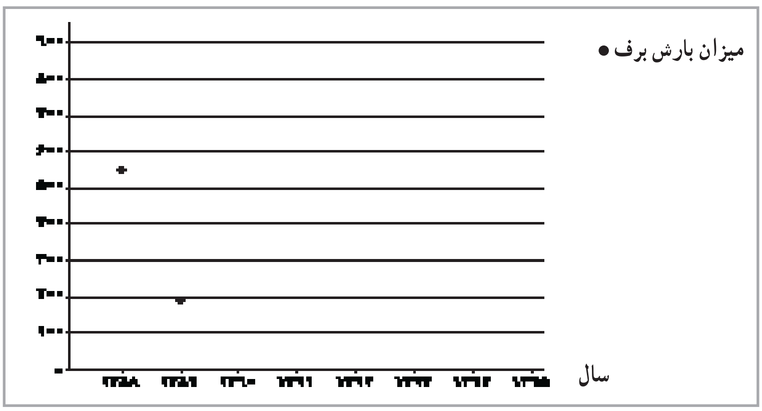
کار در کلاس

- نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست «ب» را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست «الف» مقایسه کنید.
- اگر داده دور افتاده‌ای در داده‌ها باشد، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می‌کند؟

ب) نمودار پراکنش نگاشت

فعالیت

- می‌خواهیم با استفاده از نمودار، پراکندگی میزان بارش برف سالانه را در پیست اسکی «الف»، در مدت هفت سال رسم کنیم.
- برای پیست «الف» نمودار زیر را کامل کنید.



به این نمودار، نمودار **پراکنش نگاشت** می گویند.

کار در کلاس

- برای داده‌های مربوط به پیست «ب»، نمودار پراکنش نگاشت را رسم کنید.
- بر اساس نمودارهای پراکنش نگاشت رسم شده پیست «الف» و «ب»، پراکندگی میزان بارش برف سالانه را در این دو پیست اسکی، در مدت هفت سال مقایسه کنید.

ج) نمودار حبابی

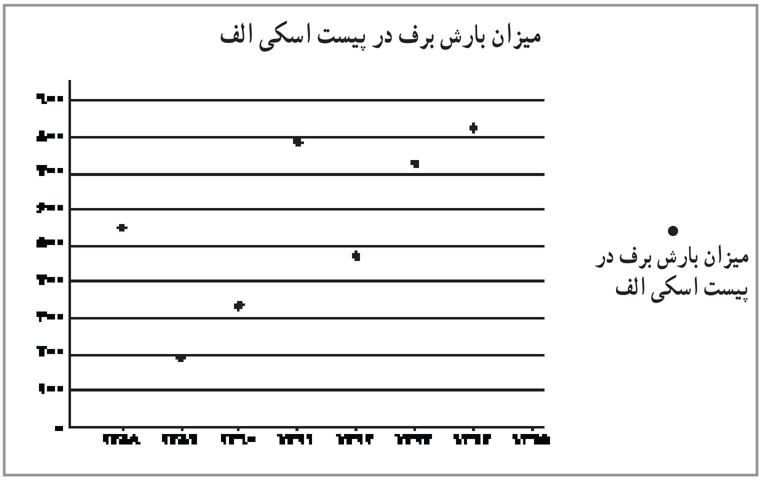
فعالیت

حال فرض کنید به اطلاعات داده‌های میزان بارش سالانه برف، درصد افرادی که در این هفت سال از این دو پیست استفاده کرده‌اند را هم اضافه کنیم. بنابراین داده‌ها به صورت زیر خواهد شد :

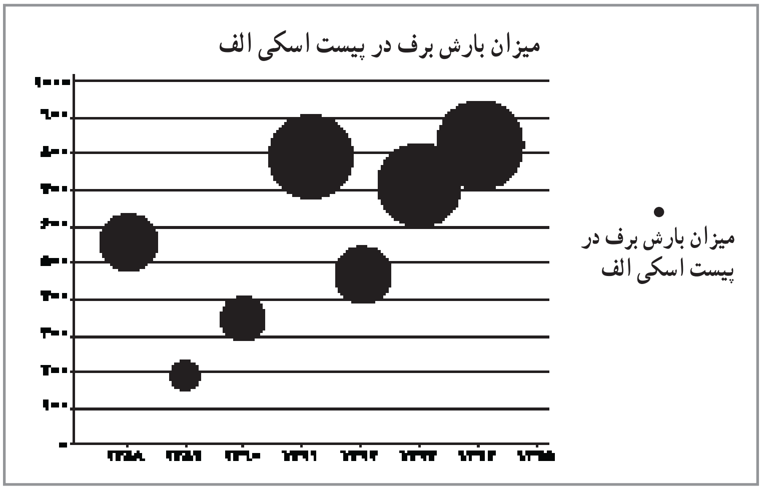
سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
درصد افرادی که از پیست الف استفاده کرده‌اند	۸۰	۷۹	۵۰	۷۸	۳۰	۲۵	۴۵

- آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر سال، میزان بارش برف در پیست اسکی «الف» و درصد افرادی که از پیست «الف» استفاده کرده‌اند را به‌طور همزمان در یک نمودار رسم کرد؟
- نمودار پراکنش نگاشت با اضافه شدن درصد افرادی که از پیست «الف» استفاده کرده‌اند به چه صورتی خواهد شد؟

برای پاسخ به این سؤالات کافی است ابتدا نمودار پراکنش نگاشت را برای دو متغیر سال و میزان بارش برف در پیست اسکی «الف» رسم کرد. به نمودار زیر نگاه کنید.



حال اگر اندازه نقطه‌های نمودار را متناسب با درصد افرادی که از پیست «الف» استفاده کرده‌اند رسم کنیم، می‌توانیم سه متغیر را در این نمودار ببینیم.



به این نمودار، **نمودار حبابی** می‌گویند. برای رسم این نمودار، از نرم‌افزار اکسل استفاده می‌شود.

رسم نمودار حبابی با استفاده از نرم افزار اکسل

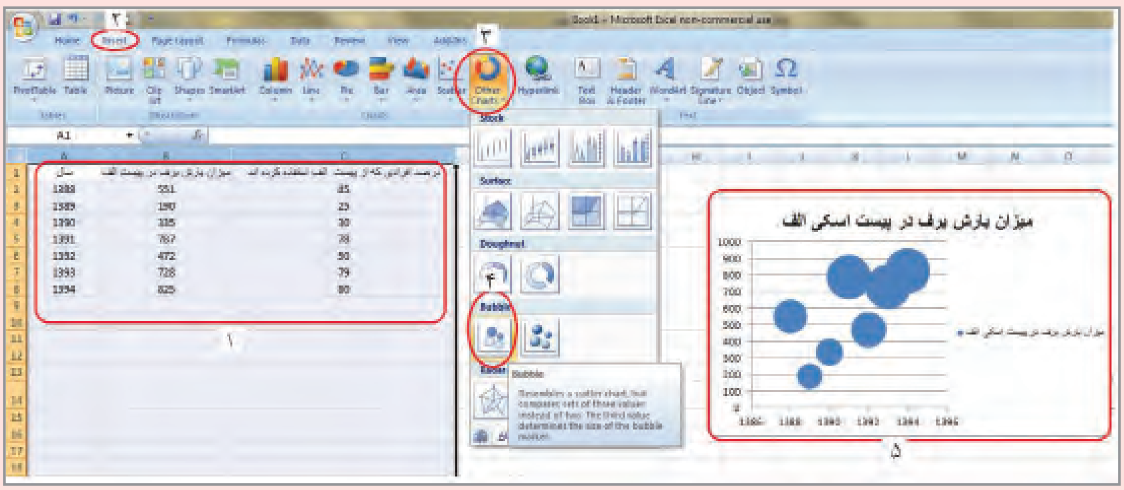
۱ ورود داده‌ها در محیط اکسل و انتخاب آنها

۲ انتخاب قسمت «Insert» در نوار بالایی صفحه

۳ انتخاب «Other Charts»

۴ انتخاب نمودار حبابی یا «Bubble»

۵ رسم نمودار حبابی



نمودار حبابی گونه خاصی از نمودار پراکنش نگاشت است، با این تفاوت که در این نمودار به طور هم‌زمان سه متغیر کمّی به کار می‌روند. متغیر سوم به صورت حباب یا دایره‌های توپر نشان داده می‌شود. لازم به ذکر است این متغیر نباید مقادیر صفر و منفی بگیرد.

کار در کلاس

■ برای داده‌های مربوط به پیست اسکی «ب»، نمودار حبابی را با استفاده از نرم‌افزار اکسل رسم کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی «ب»	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱
درصد افرادی که از پیست اسکی «ب» استفاده کرده‌اند	۴۵	۳۵	۱۰	۷۰	۳۷	۲	۲۰

■ براساس نمودارهای حبابی پیست اسکی «الف» و «ب» ، درصد افرادی که از این دو پیست اسکی، در مدت هفت سال استفاده کرده‌اند را مقایسه کنید؟

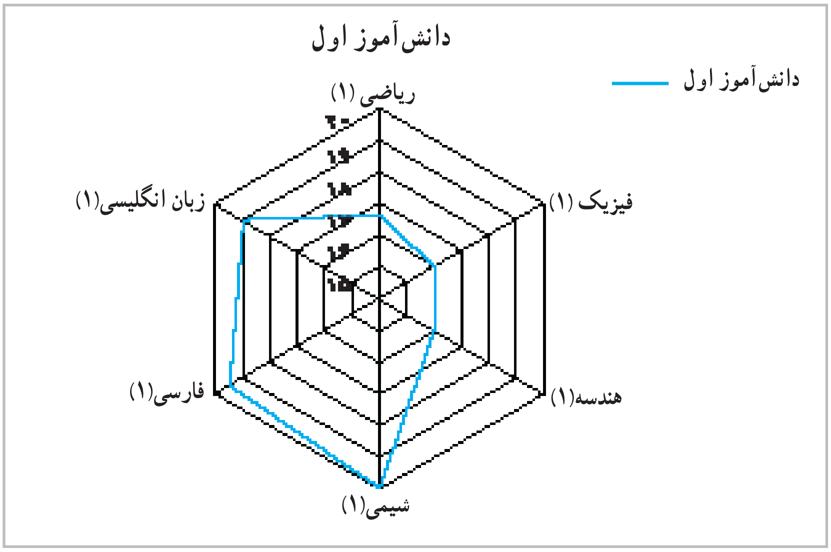
د) نمودار راداری

فعالیت

مدیر یک مدرسه می‌خواهد وضعیت درسی چهار دانش‌آموز برتر پایه یازدهم را به صورت تصویری برای اولیای دانش‌آموزان نشان دهد. معدل و نمرات برخی دروس ریاضی (۱)، فیزیک (۱)، هندسه (۱)، شیمی (۱)، فارسی (۱) و زبان انگلیسی (۱) این دانش‌آموزان را در جدول زیر گردآوری می‌کنند.

شماره	دروس دانش آموز	دانش آموز اول	دانش آموز دوم	دانش آموز سوم	دانش آموز چهارم
۱	ریاضی (۱)	۱۷/۵	۱۶/۵	۲۰	۱۹
۲	فیزیک (۱)	۱۷	۱۶/۵	۱۹	۱۸
۳	هندسه (۱)	۱۷	۱۷/۵	۱۸/۵	۱۷
۴	شیمی (۱)	۲۰	۲۰	۱۷	۱۷/۵
۵	فارسی (۱)	۱۹/۵	۱۹/۵	۱۶/۵	۱۶/۵
۶	زبان انگلیسی (۱)	۱۹	۱۸	۱۶	۱۷
معدل دانش آموز		۱۸/۳۳	۱۸	۱۷/۸۳	۱۷/۵۰

مدیر مدرسه می‌خواهد وضعیت هر دانش‌آموز را در تمام دروس به‌طور هم‌زمان در یک نمودار ببیند، برای این منظور به سراغ معلم آمار می‌رود. معلم آمار نمودار زیر را پیشنهاد می‌دهد.



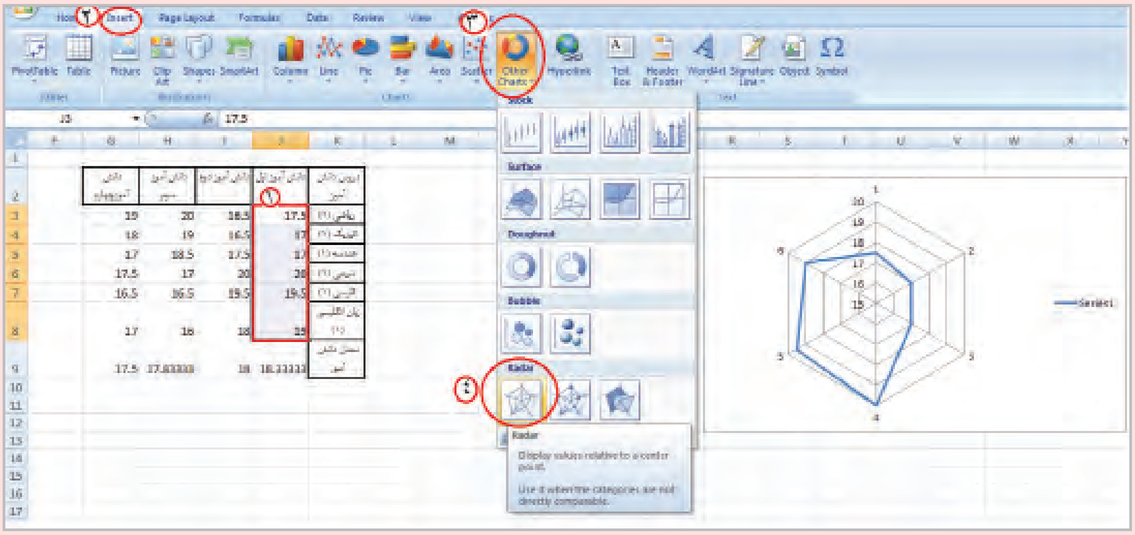
به این نمودار، **نمودار راداری** می‌گویند. نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر نیم‌خط) به شکل پره‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه مرکزی به یکدیگر اتصال دارند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک متغیر است. از این نمودار برای نمایش پراکندگی داده‌های حداقل سه متغیر کمی استفاده می‌شود.

می‌توان این نمودار را با استفاده از نرم‌افزار اکسل به صورت زیر رسم کرد.

- نمودار راداری را برای دانش‌آموز دوم، سوم و چهارم رسم کنید.
- با توجه به چهار نمودار راداری، کدام دانش‌آموزان نمرات ریاضی (۱)، فیزیک (۱) و هندسه (۱) بالایی دارند؟
- کدام دانش‌آموزان را برای انتخاب در تیم المپیاد ریاضی به مدیر مدرسه پیشنهاد می‌دهید؟

رسم نمودار راداری با استفاده از نرم‌افزار اکسل

۱ ورود داده‌ها در محیط اکسل و انتخاب آنها
۲ انتخاب قسمت ”Insert“ در نوار بالایی صفحه
۳ انتخاب “Other Charts“
۴ انتخاب نمودار حبابی یا ”Radar“
۵ رسم نمودار راداری



توجه کنید اعداد ۱ تا ۶ در نمودار شماره درس‌ها و واژهٔ series۱ نشان‌دهنده دانش‌آموز اول است.

کار در کلاس

مدیر یک مدرسه به طور هم‌زمان به بررسی اوضاع تعداد دانش‌آموزان خود در پایه‌های دهم و یازدهم به تفکیک رشته‌های ریاضی، علوم تجربی و علوم انسانی جدول زیر را تهیه نمود.

تعداد دانش آموزان مدرسه	پایهٔ دهم	پایهٔ یازدهم
تعداد دانش آموزان در رشتهٔ ریاضی	۵۶	۴۶
تعداد دانش آموزان در رشتهٔ علوم تجربی	۱۲۵	۱۲۰
تعداد دانش آموزان در رشتهٔ علوم انسانی	۶۶	۶۳

■ نمودار راداری تعداد دانش‌آموزان به تفکیک رشته‌هایشان در پایهٔ دهم را با استفاده از نرم‌افزار اکسل رسم کنید.

تمرین

۱ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

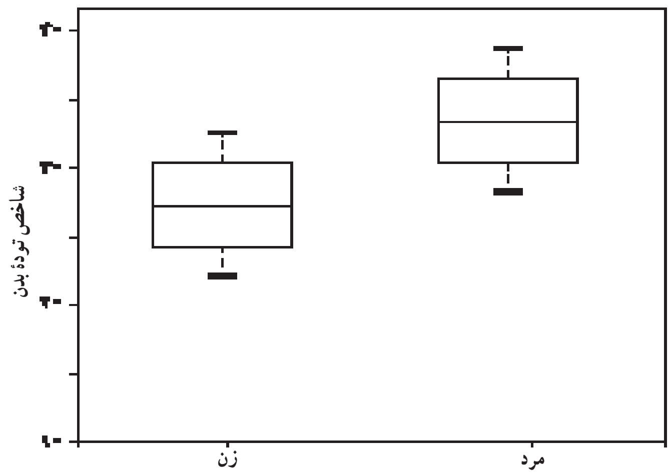
۲، ۱، ۵، ۵، ۲،۲، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱، ۴، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

نمودارهای جعبه‌ای و پراکنش نگاشت را برای این داده‌ها رسم کنید.

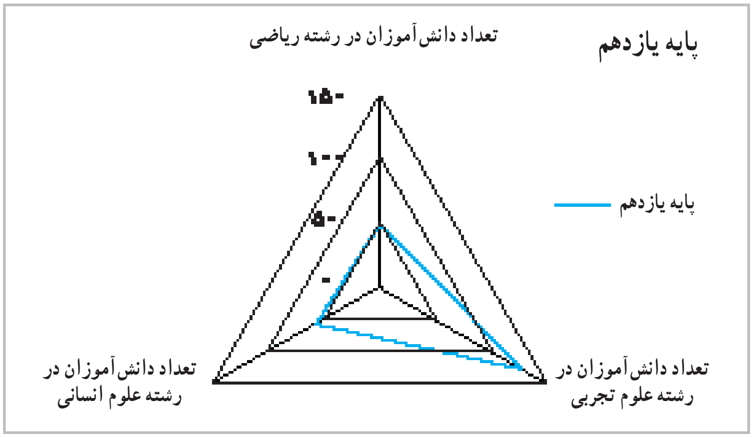
۲ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

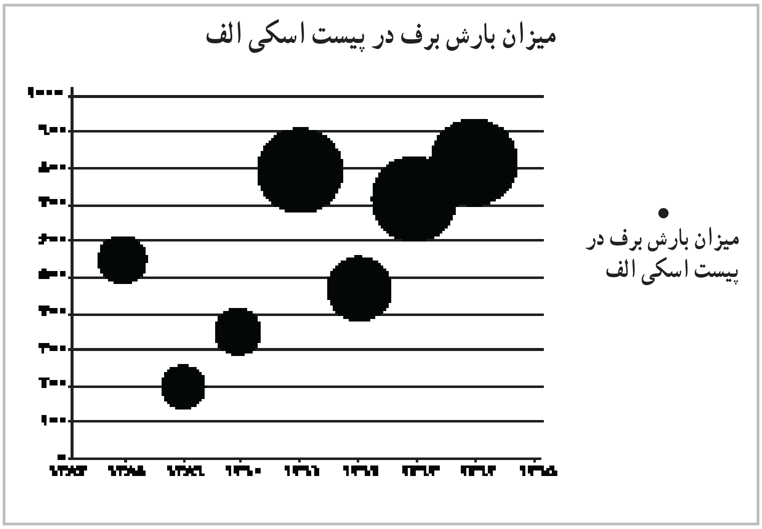
ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟



۳ نمودار زیر، نمودار راداری مربوط به تعداد دانش‌آموزان پایه یازدهم به تفکیک رشته‌هایشان است. این نمودار را تفسیر کنید.



۴ نمودار حبابی مربوط به داده‌های میزان بارش سالانه برف، درصد افرادی که از سال ۸۸ تا ۹۵ از این دو پیست استفاده کرده‌اند رسم شده است.



این نمودار را تفسیر کنید.

۵ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای و پراکنش نگاشت این داده‌ها را رسم کنید.

نرخ بیکاری

امروزه بیکاری یکی از موضوعات مهم در جوامع بشری است که دولتمردان وسیاست‌گذاران تمامی کشورهای جهان به دنبال راهکارهایی برای از بین بردن این مسئله در کشورشان و فراهم کردن زمینه‌ای برای به‌کارگیری استعدادهای مردمان کشورشان هستند. در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ بیکاری بیان می‌شود. نرخ بیکاری، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{کل جمعیت فعال}}$$

جمعیت بیکار به افراد ۱۰ ساله و یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای گفته می‌شود که سه شرط زیر را توأماً دارا باشند :

- در هفته مشخص حتی یک ساعت هم کار نکرده باشد.
- آمادگی برای انجام کار داشته باشد.
- در هفته مشخص و سه هفته قبل از آن جویای کار باشد. (اقدامات مشخصی را به منظور جستجوی اشتغال، مزد بگیری و یا خود اشتغالی به عمل آورده باشد.)

جمعیت شاغل به افراد ۱۰ ساله و یا بالاتر از ۱۰ ساله که در طول هفته مشخص (بازه زمانی ۷ روزه‌ای که وضع فعالیت افراد در این بازه زمانی مدنظر باشد) حداقل یک ساعت کار کرده باشد را شاغل گویند.

جمعیت فعال به مجموع جمعیت بیکار و شاغل گفته می‌شود.

به عنوان مثال فرض کنید جمعیت فعال برابر .... و جمعیت بیکار ..... است. بنابراین نرخ بیکاری برابر .... خواهد شد.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{?}{?}$$

۴ آمار استنباطی

۱ گردآوری داده‌ها

فعالیت

می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران را بررسی کنیم. آیا برای انجام این کار می‌توانیم ویژگی‌های همه مگس‌های سفید را اندازه‌گیری کنیم؟ آیا همه آنها در دسترس هستند؟ آیا زمان و هزینه لازم برای این کار در اختیار داریم؟

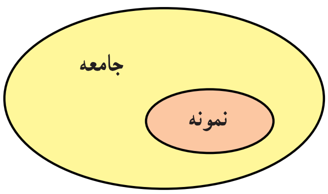
داده‌ها واقعیت‌هایی دربارهٔ یک چیزاند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند.

واحد آماری به هریک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعهٔ کلّ واحدهای آماری را **جامعهٔ آماری** می‌نامند.

هر زیر مجموعه از جامعهٔ آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک **نمونه** می‌نامند.

نمونه‌گیری، فرایند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه به منظور استفاده از اطلاعات آن است.



بیشتر مطالعات آماری بر روی بخشی از جامعه است. رابطه بین جمعیت و بخشی از آنکه نمونه نامیده می‌شود، در شکل نشان داده شده است.

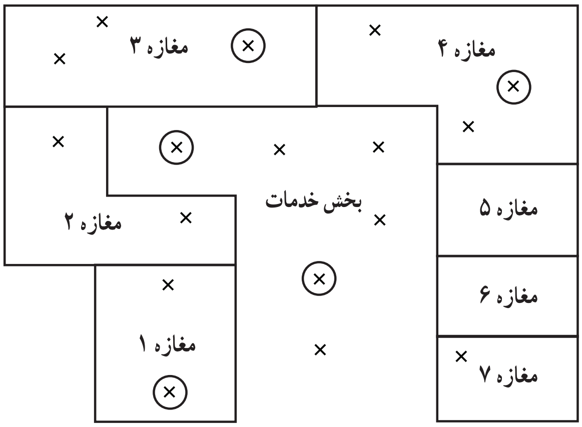
کار در کلاس

در فعالیت قبل هر مگس سفید .... است. همه مگس‌های سفید، که کل واحدهای آماری هستند، .... را تشکیل می‌دهند. اگر طول عمر همه مگس‌های سفید را در اختیار داشته باشیم، داده‌های .... را داریم. ۱۰۰ مگس سفید معرف یک .... است.

نمونه‌گیری تصادفی ساده نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همهٔ واحدهای نمونه‌گیری برای انتخاب شدن در نمونه، و نیز برای گزینش هریک از نمونه‌های ممکن شانس یکسان دارند.

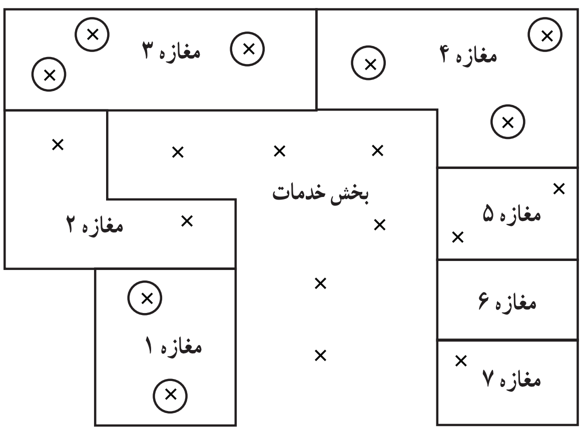
فعالیت

۱ می‌خواهیم درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه کنیم. اگر این مجتمع از ۷ مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده باشد چگونه از ۱۷ نفر، ۶ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنید. یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن اسامی کارکنان یا شماره کارمندی آنها روی ۱۷ برگه کوچک و انتخاب تصادفی ۶ تا از آنها است. ما این کار را انجام داده‌ایم شما هم راه حلی پیشنهاد کنید. در شکل زیر نقشه‌ای از مجتمع تجاری ترسیم شده که کارکنان با × و دور انتخاب شدگان یک دایره رسم شده است. آیا این روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است. آیا همه واحدهای نمونه شانس برابری برای انتخاب دارند؟



انجام نمونه‌گیری تصادفی ساده در عمل با دشواری‌هایی همراه است. اگر اندازه جامعه بزرگ باشد یعنی تعداد واحدهای آماری زیاد باشند دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی غیرممکن، دشوار و ممکن است هزینه‌بر باشد. شما چه محدودیت‌هایی را می‌شناسید؟ چند تا از آنها را نام ببرید.

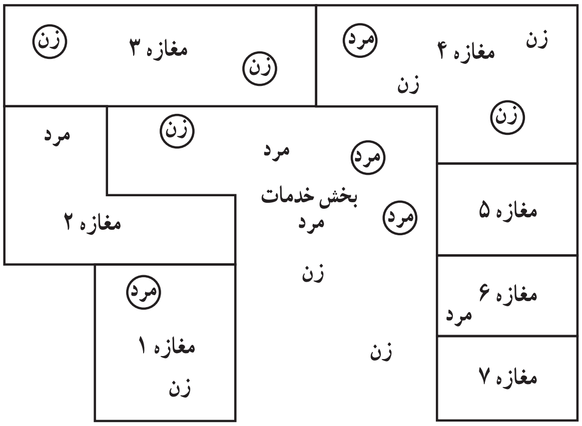
۲ هر یک از ۷ مغازه و بخش خدمات را به‌صورت یک گروه فرض می‌کنیم. حال از بین ۸ گروه در نظر گرفته شده سه تا از آنها را به تصادف انتخاب کرده و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم. آیا این روش نمونه‌گیری **سریع‌تر**، **دقیق‌تر**، و **کم‌هزینه‌تر** است؟



نمونه‌گیری خوشه‌ای: نمونه‌گیری که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند.

می‌خواهیم میانگین نمرات دانش آموزان شهر تهران را محاسبه کنیم. اگر فهرست همه دانش‌آموزان را در اختیار نداشته باشیم، نمونه‌گیری خوشه‌ای راه مناسبی برای گردآوری داده‌ها است. اگر بودجه کافی یا زمان لازم برای نمونه‌گیری تصادفی ساده در اختیار نداشته باشیم آیا این روش مقرون به صرفه است؟

۳ اگر بخواهیم یک نمونه ۸ تایی شامل دقیقاً ۴ مرد و ۴ زن از مجتمع تجاری بگیریم چگونه این کار را انجام می‌دهیم؟ زمانی که جامعه به دو یا چند بخش تقسیم می‌شود که عضو مشترکی ندارند می‌توان از هر بخش جداگانه نمونه‌گیری کرد. این کار با افزایش هزینه یا زمان همراه است ولی انتظار داریم که ...... را نیز افزایش دهد.



نمونه‌گیری طبقه‌ای: روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیر جامعه‌های نامتداخل، یک نمونهٔ تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.

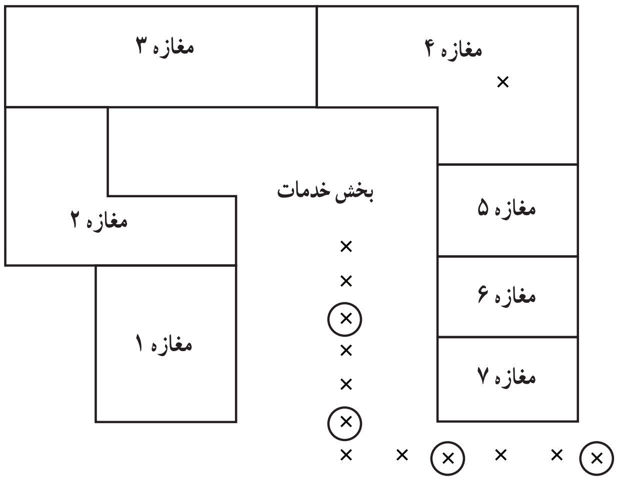
علاقه‌مند به نمونه‌گیری از نمرات درس ریاضی دانش آموزان استان تهران هستیم. اگر فهرست همه دانش آموزان را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم از نمونه‌گیری تصادفی ساده استفاده کنیم. ولی این روش نمونه‌گیری هیچ تضمینی ندارد که دانش‌آموزان از تمامی شهرهای استان در نمونه حضور داشته باشند. درصورتی‌که اگر از هر شهر متناسب با جمعیت آن نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام دهیم مشکل قبلی رفع می‌شود. به عبارت دیگر از نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده می‌کنیم. حال فرض کنید فقط فهرست مدارس را در اختیار داشته باشیم. چه روش نمونه‌گیری پیشنهاد می‌کنید؟ (راهنمایی شما می‌توانید از دو روش نمونه‌گیری پشت سر هم استفاده کنید.)

۴ فرض کنید در مجتمع ۱۲ نفر حضور دارند. صبر می‌کنیم که مجتمع تجاری تعطیل شود و هنگام خروج کارکنان می‌خواهیم نمونه ۴ نفری انتخاب کنیم. برای این منظور همانند شکل صفحه بعد عمل کرده‌ایم. ابتدا از ۳ نفر یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در این شکل نفر اول انتخاب شده است. حال با همین رویه برای سه نفر بعد هم، نفر اول را انتخاب کرده و ادامه می‌دهیم. این روش نمونه‌گیری شباهت بیشتری به کدام یک از روش‌های نمونه‌گیری قبلی دارد. این کار باعث چه نوع صرفه‌جویی می‌شود.

به نظر شما این نوع نمونه‌گیری در کدام‌یک از مثال‌های زیر امکان پیاده‌سازی دارد :

■ گردآوری اطلاعات از مبدأ و مقصد مسافران در خروجی ــ ورودی یک شهر
■ کنترل کیفت یک خط تولید
■ انتخاب نمونه از ماهی‌های یک حوضچه

آیا اعضای جامعه برای انتخاب شدن در نمونه دارای شانسی برابر هستند؟ چرا؟



نمونه‌گیری سامانمند یا سیستماتیک نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات باهم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر این کار انجام می‌گیرد.

کار در کلاس

جدول زیر را تکمیل کنید.

روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده		
خوشه‌ای		
طبقه‌ای		
سیستماتیک		

فعالیت

از مگس‌های سفید با چه روشی می‌توان نمونه‌گیری کرد؟ فهرستی از آنها نداریم، تعداد آنها را هم نمی‌دانیم. می‌توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونه در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه‌گیری به تمامی واحدهای نمونه شانس انتخاب می‌دهد؟ چهار روش نمونه‌گیری ذکر شده چطور؟

نمونه‌گیری احتمالی : نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری شانسی برای انتخاب در نمونه داشته باشد.

نمونه‌گیری‌های چهار فعالیت قبل، همگی احتمالی هستند.

کار در کلاس

راه حلی ارائه کنید که نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی زیر را احتمالی می‌کند هرچند که به صورت غیر واقعی باشد.

مثال	نمونه‌گیری غیر احتمالی	نمونه‌گیری احتمالی
نمونه‌گیری از یک قفس بزرگ خرگوش‌های یک آزمایشگاه	بدون برنامه‌ریزی خرگوش‌هایی را برمی‌دارد که دستش به آنها می‌خورد.	
داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سؤالات شما می‌شوند.	در مطالعاتی که در آنها فرایند سنجش برای شخصی که سنجیده می‌شود ناخوشایند یا دردسرآفرین است.	
نمونه‌گیری از زغال‌سنگ‌های یک واگن	نمونه در دسترس انتخاب می‌شود.	

فعالیت

می‌خواهیم تعداد خودروهای آلاینده بین دو شهر نزدیک را تخمین بزنیم. برای این منظور در پلیس راه یکی از شهرها اقدام به نمونه‌گیری سیستماتیک می‌کنیم. فرض کنید در بین این دو شهر تاکسی های مستعمل فعالیت می‌کنند. آیا شانس انتخاب آنها در نمونه بیشتر است؟ آیا این روش نمونه‌گیری برای این مسئله مناسب است؟ چرا؟

اریبی در نمونه‌گیری : اثری که به طور منظم باعث شود نمونه معرف جامعه نباشد.

کار در کلاس

مشت نمونه خروار است یعنی نمونه باید معرف جامعه باشد. اریبی باعث می‌شود که مشت نمونه خروار نباشد. در هر یک از مثال‌های زیر دلیل اریبی را ذکر کنید.

- مترو اعلام کرده است که ۹۰ درصد افراد از کارت به‌جای بلیت استفاده می‌کنند.
- نمونه‌گیری از ماهی‌های سطح یک دریاچه
- نمونه‌گیری برای بررسی یک پدیده اجتماعی در یک دانشگاه

فعالیت

می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

آمارگیری : گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن
آمارگیر : کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می‌توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.
مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده‌ها

اندازه طول قد	چوب‌خط برای شمارش	تعداد دانش‌آموزان
کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر		
۱۴۹ـ۱۴۰ سانتی‌متر		
۱۵۹ـ۱۵۰ سانتی‌متر		
۱۶۹ـ۱۶۰ سانتی‌متر		
۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر		

چگونه مطمئن می‌شوید که دانش‌آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می‌کنید؟
آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه‌حل ساده‌تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم‌ترین روش‌های آمارگیری، استفاده از پرسش‌نامه است. پرسش‌نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت‌نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده‌اید. پرسش‌نامه را می‌توانند واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل کنند.

مثالی از پرسش‌نامهٔ طراحی شده

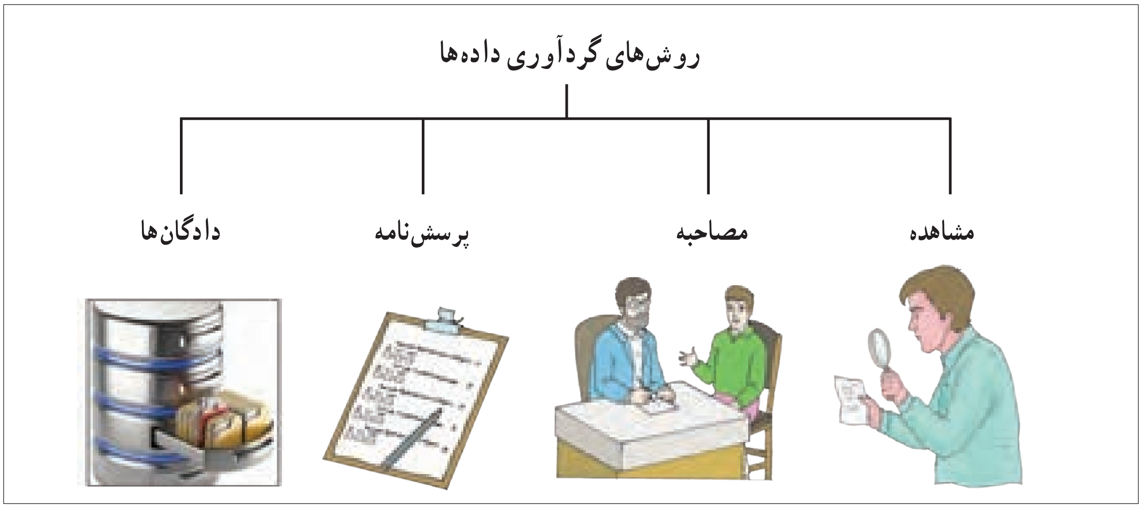
سلام، می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
طول قد شما چقدر است؟

- کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۴۹ـ۱۴۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۵۹ـ۱۵۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۶۹ـ۱۶۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر ☐

کار در کلاس

۱ چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه پیشنهاد می‌کنید؟

۲ فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری تمامی داده‌های دانش‌آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟



۱ مشاهده : گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخ‌گو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیهٔ عبوری از یک‌تقاطع در هر ساعت یا اندازه‌گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

۲ پرسش‌نامه : مجموعهٔ سؤالات از پیش تعیین‌شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰سال یک‌بار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات تمامی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.

۳ مصاحبه : معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخ‌گو است. مثلاً اگر بخواهیم دربارهٔ مسائل فرهنگی کاهش شدآمد(ترافیک) پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب نظران راه‌حل مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن را ندارد.

۴ دادگان‌ها : شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به‌دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به سرعت رواج یافته است.

تمرین

کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱ میزان رضایت مشتریان بانک از نحوهٔ برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

۲ سن همهٔ دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایهٔ دهم.

۳ تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

کار در کلاس

الف) کدام روش برای جمع‌آوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱ تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.

۲ ساعات خواب دانش آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳ طول قد دانش آموزان یک کلاس.

ب) می‌خواهیم طول قد دانش آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر **آمارگیری** کنیم. هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین ببرد؟

پرسش‌نامه : اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده : اگر به‌دقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

دادگان‌ها : همیشه اطلاعات ثبتی را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

خواندنی

آمارگیری را می‌توان به روش‌هایی بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ابزاری نظیر **گوگل فُرم** یک پرسش‌نامه طراحی کرد، و آن را به نشانی نمونه انتخابی ارسال کرد و نتایج را از گوگل فرم بازیابی کنیم.

فعالیت

قرار است دربارهٔ افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همهٔ افرادی هستند که توانسته‌اند به قلّه برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) موردنیاز است. به هریک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیّر می‌گویند. سایر متغیّرها می‌توانند مواردی مانند : سن، وزن، ملیّت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیّرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

متغیّر : هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.
متغیّر کمّی : متغیّرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.
متغیّر کیفی : متغیّرهایی هستند که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به‌کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد متغیّرهای کمّی هستند. متغیّرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی‌اند و در مثال کوه‌نوردان دنا ، جنسیت و ملیت را در بر می‌گیرند. به‌عنوان مثال جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه : یک مشخصهٔ عددی است که توصیف کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی‌که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است.

مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعهٔ کوهنوردان، معرف یک **پارامتر** است.
اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردانِ کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند، چرا؟
در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آماره نمونه : مشخصه‌ای عددی که توصیف کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به‌دست می‌آید.

مثال : ادارهٔ کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آمادهٔ برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیّر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیّر کمّی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، سرشماری از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان پذیر نیست). متوسط وزنِ تمامی هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.
حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مزهٔ هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد : بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزهٔ هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا متغیّر «مزه» متغیّری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، تنها بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های با مزهٔ «خوب»

در نمونه، یک «آماره» است.

به مطالعه نحوه گردآوری، سازماندهی، تحلیل، و تفسیر داده‌ها جهت استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری،آمار گفته می‌شود. فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه بر اساس نمونه، **آمار استنباطی** است.

تمرین

۱ در نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال اینکه فرد بخصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد چقدر است؟ اگر مسئله با جایگذاری باشد، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد چقدراست؟ اگر مسئله بدون جایگذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد چقدر است؟

۲ آیا در نمونه‌گیری خوشه‌ایی احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ چرا؟ احتمال انتخاب خوشه‌ها چطور؟ آیا این روش نمونه‌گیری احتمالی است؟

۳ روش‌های نمونه‌گیری احتمالی چه مزیتی بر نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی دارند؟

۴ برای هریک از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی دو مثال واقعی بیاورید.

۵ اگر اندازه جامعه بزرگ باشد نمونه‌های با جایگذاری و بدون جایگذاری مثل هم فرض شده‌اند. در این صورت می‌توانید راه حل کلی برای انتخاب تصادفی از یک فهرست N تایی ارائه کنید.

۶ آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است؟ در هر طبقه چطور؟

۷ فرق بین داده و متغیر چیست؟

۸ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

۹ در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟

۱۰ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟ الف) متغیر را مشخص کنید. ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟ ج) جامعه آماری در اینجا چیست؟

۲ برآورد

فعالیت

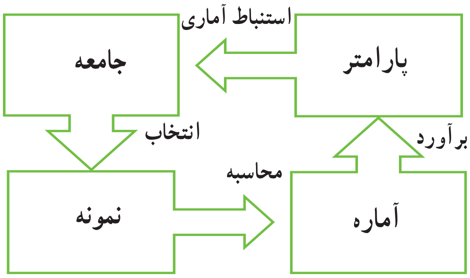
یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی را که در یک بسته قرار می‌دهد مشخص کند. تعداد لیوان‌ها در هر بسته بستگی به میانگین تعداد اعضای خانوارهای کشور دارد که بُعد خانوار نام دارد. مثلاً در ۷ سال پیش بعد خانوار ۴ بوده است. لذا بسته‌بندی لیوان‌ها از ۶ به ۴ کاهش داده شد. از آنجا که فروش شرکت کم شده، به نظر کارشناسان دلیل آن تغییر بعد خانوار در کشور است. بعد خانوار هر کشور از اطلاعات سرشماری قابل دسترسی است، که ۷ سال پیش انجام شده است. سرشماری یکی از مهم‌ترین طرح‌های آمارگیری در هر کشوری است، که در ایران هر ۱۰ سال یک بار انجام می‌شود، لذا داده‌های جدید آن تا ۳ سال آینده در دسترس نیست. از آنجا که سرشماری روش مقرون به‌صرفه‌ای برای گردآوری داده‌ها به‌منظور پاسخگویی به این سؤال نیست، شرکت تصمیم می‌گیرد که بعد خانوار خریدارهای محصول این شرکت را به‌وسیله نمونه‌گیری گروهی انجام دهد.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، بعد خانوار ۹ نفر به‌صورت زیر باشد. میانگین بعد این نمونه چقدر است.

۳	۲	۷	۲	۵	۳	۳	۱	۴

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جایگذاری اعداد نمونه تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر.

در این فعالیت میانگین تعداد اعضای خانوار پارامتر است. آماره، ....؛ و برآورد نقطه‌ای پارامتر ...... است.



کار در کلاس

فرض کنید، جامعه از ۶ کارمند تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر :

۲	۵	۳	۰	۱	۴

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به‌اندازه ۱، **میانگین** این جامعه ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر یکی را به‌تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمد او ۵ باشد این عدد برآورد میانگین درآمد کارکنان مجتمع است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آنگاه صفر به‌عنوان نمونه انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد کارکنان برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

- در این مثال پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟
- آیا بر اساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟

درست حدس زده‌اید! اگر اندازه نمونه را بیشتر کنیم امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر بیشتر می‌شود. اندازه نمونه را به ۲ افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال اگر نمونه‌گیری تصادفی انجام شده شامل درآمدهای ۰ و ۴ باشد آنگاه برآورد میانگین جامعه عدد ۲ است. یعنی پارامتر جامعه که مقدار آن ۲٫۵ بوده است را ۲ برآورد کرده‌ایم.

- آیا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه دو وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲٫۵ برآورد کند؟
- آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟
- بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونه دوتایی داریم؟

در جدول زیر احتمال مشاهده هریک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است

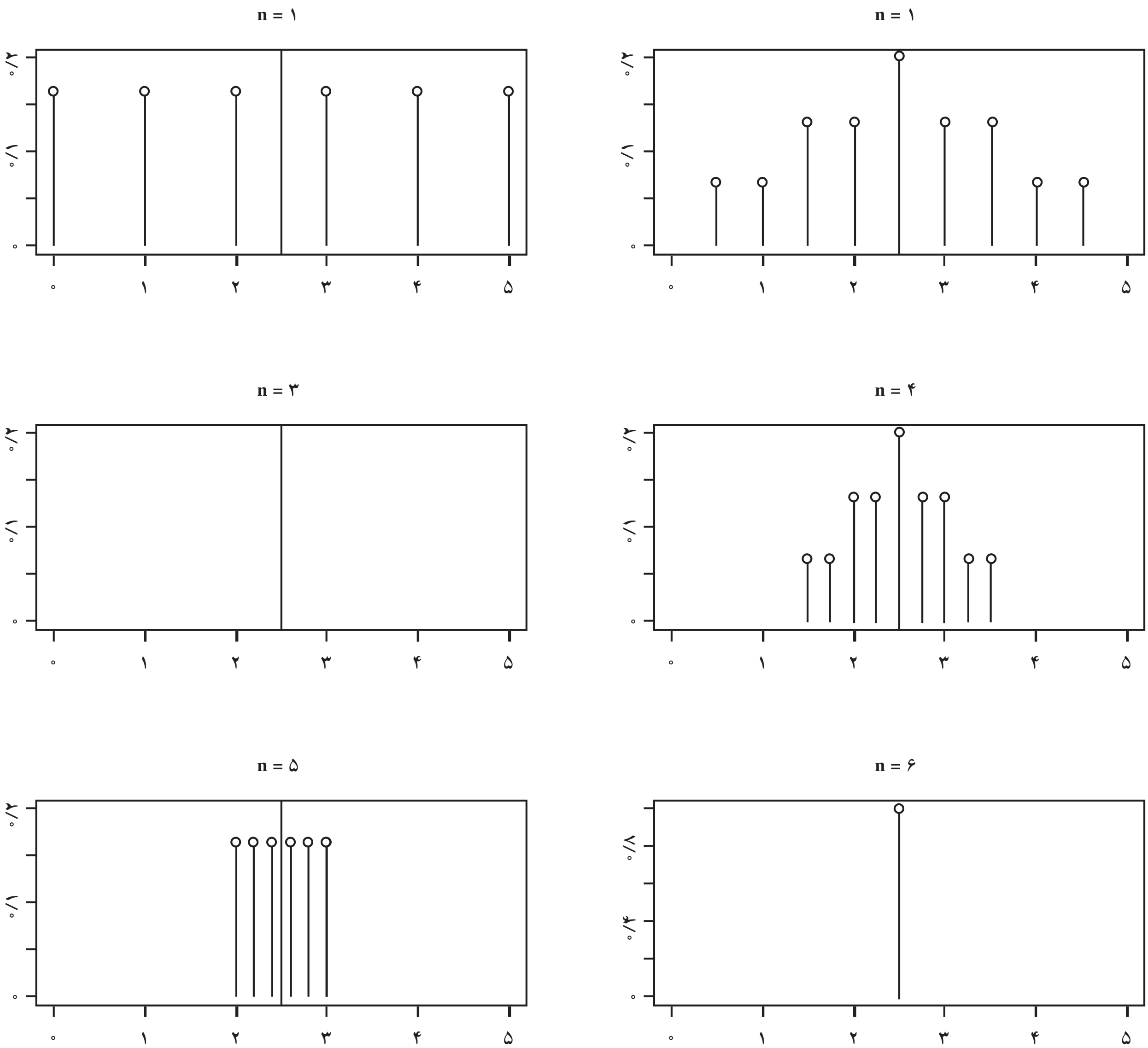
نمونه	{۰,۱}	{۰,۲}	{۰,۳}{۱,۲}	{۰,۴}{۱,۳}	{۰,۵}{۱,۴}{۲,۳}	{۱,۵}{۲,۴}	{۲,۵}{۳,۴}	{۳,۵}	{۴,۵}
$\bar{x}$	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازه ۳ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم همانند جدول قبل مقادیر $\bar{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

نمونه	{۰,۱,۲}	{۰,۱,۳}	{۰,۱,۴}	{۰,۱,۵}{۰,۲,۴} {۱,۲,۳}	{۰,۲,۵}{۰,۳,۴}{۱,۲,۴} {۰,۲,۵}{۰,۳,۴}{۱,۳,۴}				
$\bar{x}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۳}$					
احتمال									

فعالیت

جدول به‌دست آمده از کار در کلاس قبل را برای ۳ = n رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\overline{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هریک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازه نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به‌اندازه نمونه بخصوص، ۱,۲,۳,۴,۵,۶ = n است.



اگر برآورد را بر اساس نمونه‌ای به‌اندازه سه محاسبه کنیم احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد نسبت به ۱,۲ = n بیشتر است. آیا اگر اندازه نمونه از ۳بیشتر شود احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود باز هم بیشتر می‌شود؟ زمانی که اندازه نمونه به ۶ می‌رسد برآورد برابر .... می‌شود.

همان‌طور که در نمودارها دیده‌اید با افزایش اندازه نمونه برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است، نزدیک‌تر می‌شوند. به

بیان دیگر در هر نمودار با زیاد شدن اندازه نمونه انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود. پس هرچقدر انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

سؤال اساسی آن است که انحراف معیار برآورد میانگین جامعه چقدر است؟ خوشبختانه آمارشناسان پاسخ این سؤال را با رابطه زیر داده‌اند. البته برای سادگی محاسبات فرض شده که جامعه نامتناهی است.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

جذر اندازه نمونه بزرگ‌تر انحراف معیار جامعه= انحراف معیار میانگین

هرچند که انحراف معیار جامعه معمولاً معلوم نیست، ولی این رابطه حدس ما را اثبات کرده است. با افزایش اندازه نمونه انحراف معیار برآورد کاهش می‌یابد. به عبارتی دیگر برآورد دقیق‌تر یا خطای کمتری برای برآورد میانگین جامعه داریم.

کار در کلاس

به فعالیت ابتدای درس باز می‌گردیم. اگر از مطالعات سال‌های گذشته بدانیم که انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۲ میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای اندازه نمونه‌های ذکر شده را محاسبه کنید.

n	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰
$\sigma_{\bar{x}}$			

- انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه با نمونه ۱۰۰ نفری چند برابر انحراف معیار با نمونه ۱۰۰۰۰ نفری است؟
- اگر اندازه نمونه ۱۰ برابر شود انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

برآورد بازه‌ای

اگر بعد از یک آزمون ساده از شما سؤال شود نمره شما چند می‌شود، حتماً بدون تردید نمره‌ای که انتظار آن را دارید می‌گویید. این یک برآورد ذهنی است (که مرتبط به درس فعلی ما نمی‌شود ولی برای درک ادامه درس مفید است). حال فرض کنید آزمون ساده نبوده و به صحیح بودن برخی پاسخ‌های خود شک دارید. بازهم به‌صورت ذهنی پاسخ می‌دهید ولی پاسخ شما با شک و تردید همراه است. معمولاً ترجیح می‌دهید به‌جای ذکر یک نمره بازه‌ای برای نمره خود به‌صورت ذهنی ترسیم کرده‌اید بیان کنید. به خاطر اینکه اطمینان خود را نیز از بازه ذکر شده بیان کنید به ذکر یک درصد اطمینان اکتفا می‌کنید. مثلاً می‌گویید نمره من بین ۱۶ تا ۱۹ است با اطمینان ۹۰ درصد. هرچه فاصله دو عدد بازه کمتر باشد و درصد اطمینان ذکر شده بیشتر، برآورد دقیق‌تر است.

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌های عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به **ضریب اطمینان** شهرت دارد.

فعالیت

در فعالیت قبل میانگین داده‌ها ۲/۵ محاسبه می‌شود. یعنی برآورد میانگین جامعه ۲/۵ به دست آمده است. چقدر به این برآورد اطمینان داریم؟ برای یافتن پاسخ سؤال به یاد آورید که دقت برآورد میانگین جامعه به ...... و .... بستگی داشت. اگر .... زیاد می‌شد یا .... کم بود، دقت برآورد میانگین بیشتر می‌گردید. بر اساس این دو کمیت پاسخ این سؤال را با رابطه زیر داده‌اند.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه : اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازه n در اختیار داشته باشیم با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم

$$\overline{x} - ۲\sigma / \sqrt{n} < \mu < \overline{x} + ۲\sigma / \sqrt{n}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

کار در کلاس

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر موردنیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه. بر اساس داده‌های فعالیت اول خط فقر را برآورد کنید. انحراف معیار جامعه را برآورد کنید. اگر فرض کنیم که انحراف معیار به دست آمده انحراف معیار جامعه است، یک برآورد فاصله‌ای برای خط فقر محاسبه کنید.

تمرین

۱ در اولین کار در کلاس جداول را برای نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازه ۴ و ۵ مقادیر $\overline{x}$ در مقابل احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

۲ از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به‌تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به‌صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۹	۲	۵	۷	۳	۱۲	۱۱	۹	۸	۵

فرم شماره ۱

شناسنامه کتاب

عنوان کتاب:	دوره تحصیلی:	پایه:	کد کتاب:
آمار و احتمال	متوسطه ۲	یازدهم	

۱–کتاب به کدام شایستگی‌ها (اهداف) ساحتهای تربیت پوشش می‌دهد؟

۱ـ ساحت علمی و فناوری (مستقیم)

۲ـ ساحت فراساحت‌ها (پشتیبان)

۲–کتاب به کدام شایستگی‌ها (اهداف) حوزه‌های تربیت و یادگیری پوشش می‌دهد؟

به هر ۴ شایستگی حوزه یادگیری ریاضیات که پیوست اشت پوشش می‌دهد و این پوشش در مورد شایستگی‌های ۱ و ۲ مستقیم و برای ۳ و ۴، پشتیبانی می کند.

۳– محتوای کتاب (ایده‌های کلیدی– مربوط به حوزه، از سایر حوزه‌ها)

۱ـ دانش ریاضی ۲ـ الگوها و روابط ۳ـ تفکر ریاضی ۴ـ کارکردهای زیبایی‌شناختی ۵ـ فناوری در ریاضی

به صورت تلفیق شده موارد ۱ و ۲ و ۳ در بخش‌های غیر آماری مستقیماً و مورد ۵ در بخش آمار به‌صورت مستقیم پوشش داده می‌شود.

۴–اجزای بستۀ آموزشی مرتبط با کتاب (کتاب راهنمای معلم، نرم‌افزار آموزش معلمان بر فراز آسمان، کتاب کار، فیلم آموزشی دانش‌آموز، کتاب گویا، فیلم آموزشی والدین ، ...) الزامی و غیرالزامی

– **اجزاء بسته برای ا جرای پروژه**

۱ـ کتاب راهنمای معلم

۲ـ نرم‌افزار آموزشی بر فراز آسمان

۳ـ کتاب کار دانش‌آموز

نسخه پیش نویس

جبر و احتمال

پایه یازدهم

صفحه شناسنامه کتاب ضمیمه است.

کانال ویژه کتاب های جدید ریاضی یازدهم

(جبرو احتمال)

@mathlearngif