پیش نویس ریاضی ۲ تجربی پایه یازدهم

فصل

۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس اوّل

هندسه تحلیلی

درس دوم

تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجهٔ دوم

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس اوّل

هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

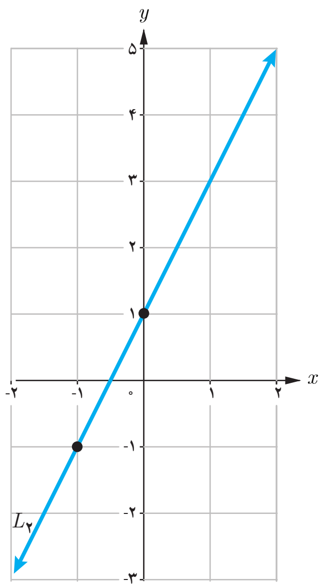
در طیف گسترده‌ای از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این حوزه، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات .... نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن .... نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.



۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید :

الف) $L_۱: y=۲x-۴$

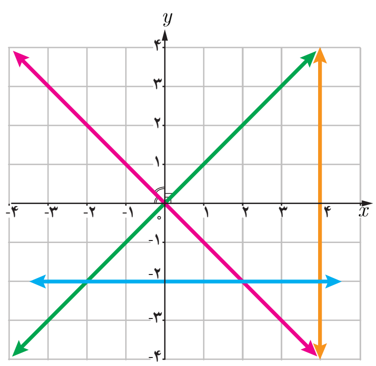
ب) $L_۲: y=۲x+۱$

x	-۱	۰
y	-۱	۱

پ) $L_۳: y=۱$

ت) $L_۴: x=-۲$

۳ معادلهٔ هریک از خط‌های مقابل را روی شکل بنویسید.



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی ....؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با $m_{AB}=\frac{\dots\dots}{x_B-x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای ...... برابر باشند.

۵ الف) از کلاس نهم به خاطر داریم که هرگاه خط l محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند آن‌گاه h، .... خط l نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲ بالا، شیب و عرض از مبدأ هریک از چهار خط ذکر شده را بنویسید. کدام دو خط از بین آنها با هم موازی‌اند؟

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=$....... دارد.

ب) معادلهٔ خط با شیب m و گذرنده از نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ عبارت است از $y-y_۰=m(x-x_۰)$

پ) می‌خواهیم معادلهٔ خط l، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، هریک از دو فرمول بالا را می‌توان به کار برد:

روش اول

معادلهٔ خط در حالت کلی : $y=mx+h$

$A(۰,۷)$ روی خط l واقع است : $۷=m(۰)+h \Rightarrow h=۷$

$B(۳,۱)$ روی خط l واقع است : $۱=$..... $\Rightarrow m=$...

معادلهٔ خط l : $y=$......

روش دوم

شیب خط: $m=\dfrac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\dfrac{۱-۷}{...}=$...

معادلهٔ خط در حالت کلی : $y-y_۱=m(x-x_۱)$

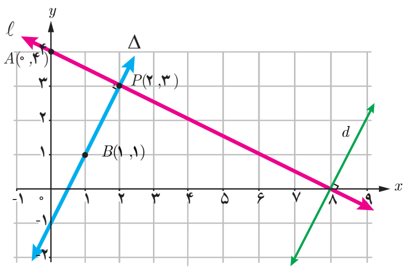
$y-۷=$...$(x-$...$)$

معادلهٔ خط l : $y=$......

ت) معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ $P(۲,-۱)$ را بنویسید که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

فعالیت کلاسی

۱ دو خط l و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می‌دهیم.



شیب خط l گذرا از نقاط A و P : $m=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{۳-۴}{۲-۰}=\dfrac{-۱}{۲}$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P : $m'=$......

۲ حاصل‌ضرب شیب دو خط را به دست می‌آوریم : ..... $=(\quad)(\quad)=mm'$ ملاحظه می‌شود که شیب‌ها عکسِ قرینهٔ یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل d عمود بر l را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ ..... است؛ پس شیب خط d برابر عدد .... خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر l برابر خواهد بود با عکسِ ..... شیب خط l. این مطلب در حالت کلی درست است[1]. یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (-۱) باشد؛ یعنی $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، عکسِ قرینهٔ شیب دیگری باشد.

۱ــ اثبات‌های مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیه فیثاغورس است.

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $l:\ y=۵x-۲$ $\qquad d:\ y=\frac{-۱}{۵}x+۳$

ب) $l:\ y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $\qquad d:\ x-۲y=۱$

پ) $l:\ ۲x-۳y+۳=۰$ $\qquad d:\ ۳x+۲y=۰$

ت) $l:\ x=۱$ $\qquad d:\ y=-۳$

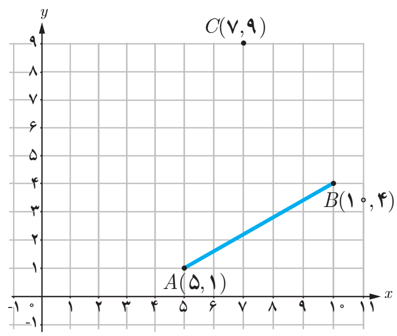
ث) $l:\ y=۳x+۱$ $\qquad d:\ x=۳y-۱$

۲ خط l به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط d با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، شیب خط d را طوری بیابید که d با l موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۳ مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحهٔ مختصات واقع است به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بیابید و معادلهٔ آن را بنویسید.

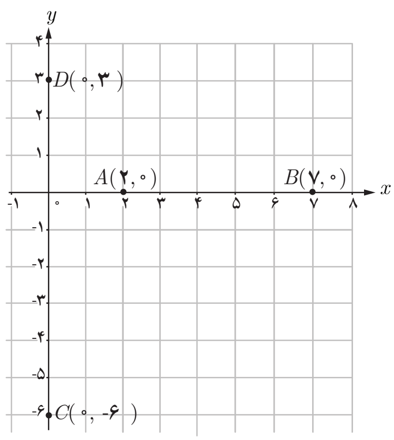
ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را هم بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) رسم مربع را کامل کنید.

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت کلاسی

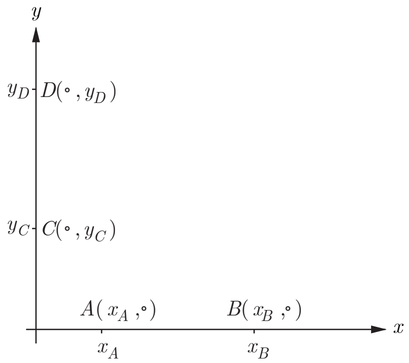


شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB می‌باشد، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بنویسید.



$AB=$

$CD=$

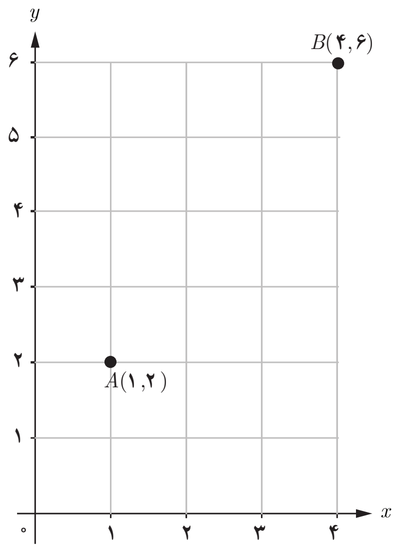
در حالت کلی می‌توان گفت:

۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB=|x_A-x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD=|y_C-y_D|$

فعالیت کلاسی

۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.



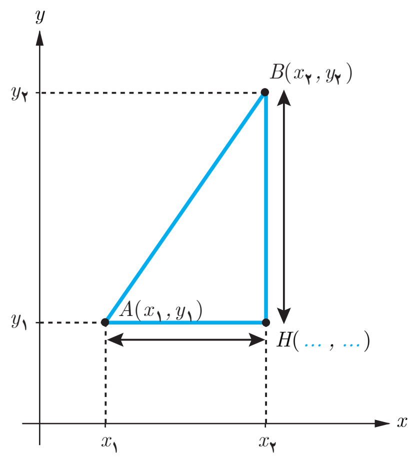
۲ بدون استفاده از خط‌کش و تنها با محاسبه، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟

۳ در شکل مقابل:

الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

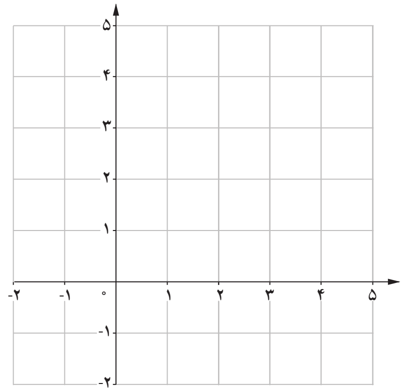
پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.



با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$

کار در کلاس



۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$AC=\cdots$

$BC=\cdots$

محیط مثلث: $P=\cdots$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

پ) به دو روش نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

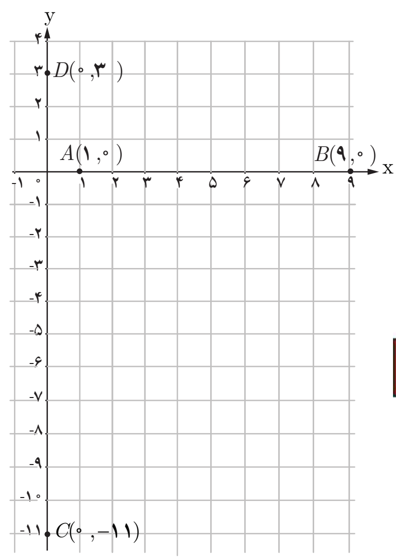
۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. نزدیک‌ترین پایگاه‌های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگردِ امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

۳ الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات، از نقطهٔ $N(-۶,۸)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

نقطهٔ وسط پاره‌خط

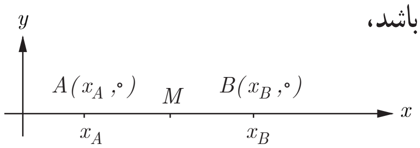
فعالیت کلاسی



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

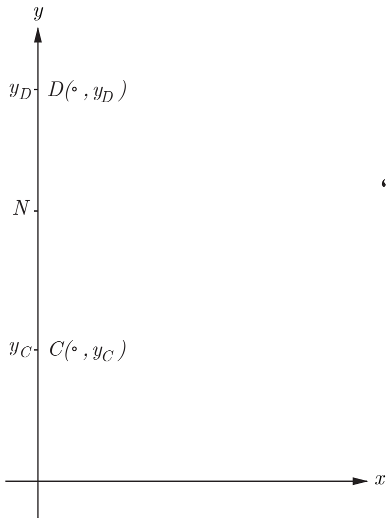


پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

M وسط $AB \Rightarrow AM = MB$

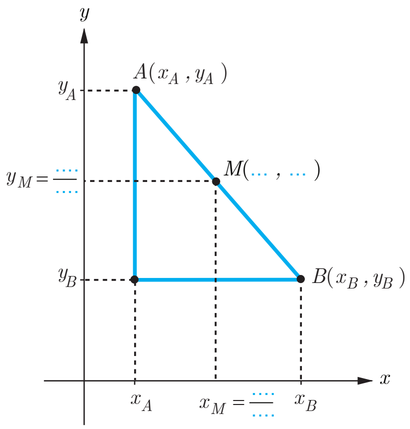
$\Rightarrow x_M - x_A = \ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow ۲x_M = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \boxed{x_M = \dfrac{x_A + x_B}{\ldots\ldots}}$



ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

N وسط $CD \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Rightarrow y_N = \dfrac{\ldots}{۲}$



ث) A و B را دو نقطهٔ دلخواه در صفحه مختصات در نظر بگیرید به طوری که M وسط AB باشد. با توجه به شکل، مختصات M را بنویسید.

با توجه به این فعالیت، دیده می‌شود که:

نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\dfrac{x_A + x_B}{۲}, \dfrac{y_A + y_B}{۲})$.

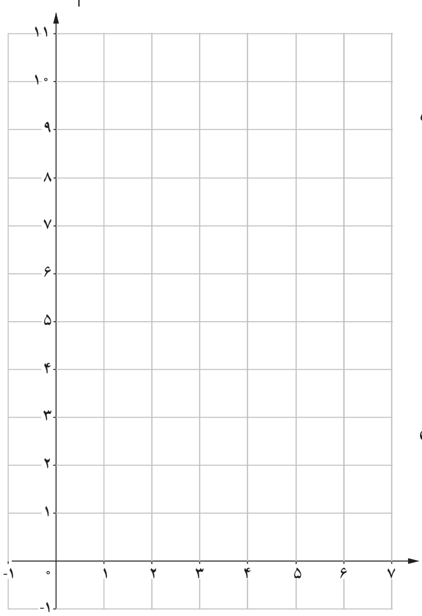
کار در کلاس

۱) مثلث با رئوس $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.



۲) الف) نقطهٔ $M(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات A را بیابید.

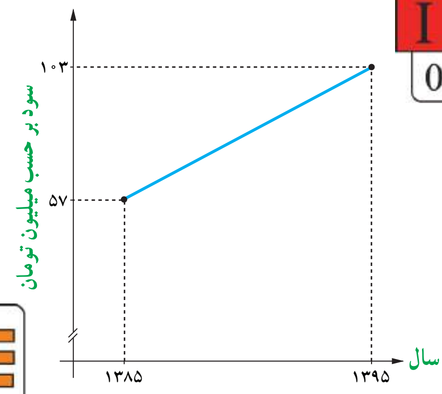
ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.

۳ سود سالانهٔ یک واحد کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک فرمول نقطهٔ میانی پاره‌خط مشخص کنید :

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

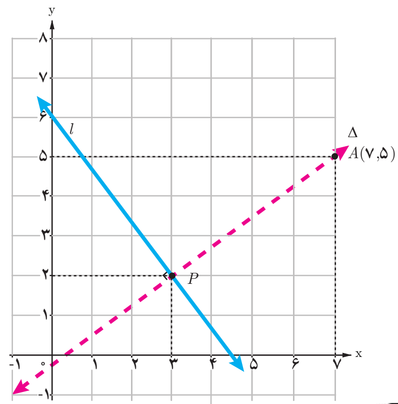


فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط l باشد، فاصلهٔ A تا l برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر l رسم می‌شود؛ یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به l.

مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط l به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل : چون شیب خط l برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرا از A و عمود بر l را می‌نویسیم.



$$y-۵=\frac{۳}{۴}(x-۷)$$
$$۴y-۲۰=۳x-۲۱$$
$$\Delta:\ ۳x-۴y=۱$$

اگر معادلهٔ دو خط l و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{matrix} l: \\ \Delta: \end{matrix}\begin{cases} ۴x+۳y=۱۸ \\ ۳x-۴y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۳ \quad , \quad y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

اگر مراحل حل این مثال را در حالت کلی به کار ببریم، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم :

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ,y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ برابر است با

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال : مثال بالا را به کمک این فرمول حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=\circ$ به دست می‌آوریم :

$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

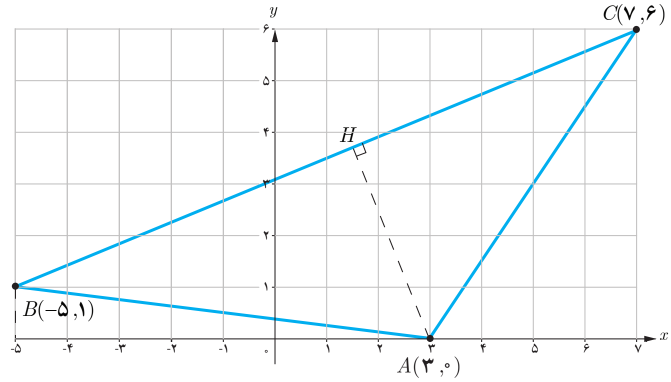
کار در کلاس

۱ مثلث با رئوس $A(۳,۰)$، $B(-۵,۱)$ و $C(۷,۶)$ را در نظر بگیرید.

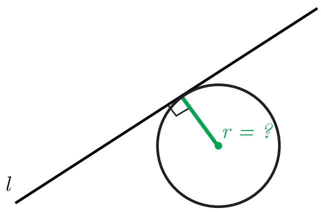
الف) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC را به دست آورید.

پ) طول ضلع BC را به دست آورید و سپس با استفاده از طول ارتفاع AH، مساحت مثلث را بیابید.

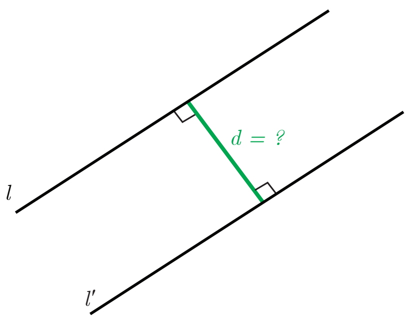


۲ خط $۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).



۳ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).



تمرین‌های درس اول

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$l: ۲x-y=۱$

$d: y=۲x-۳$

$\Delta: x+۲y=۰$

۲ دو نقطهٔ $A(۳ , ۱۴)$ و $B(-۱۳ , ۱۰)$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

ب) معادلهٔ عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

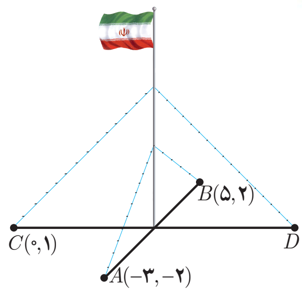
۳ نشان دهید مثلث با رئوس $A(۲ , ۱)$، $B(۵ , ۲)$ و $C(۱ , ۴)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(-۲ , ۲)$ و $B(۶ , ۴)$ هستند.

الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطهٔ $C(۳ , ۷)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۵ نقاط $(۰ , ۰)$ و $(۴ , ۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟



۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.

۷ نقاط $A(۳ , ۲)$، $B(۰ , -۱)$ و $C(-۲ , ۱)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسأله ارائه کنید؟)

۸ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است که به‌طور خلاصه می‌توان موقعیت این شهر را به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان داد. این اطلاعات در مورد چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) می‌باشد. با فرض این که مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ مستقیم این دو شهر.

۹ فاصلهٔ نقطهٔ $P(-۴ , ۷)$ را از خط به معادلهٔ $۲x + y = ۵$ به‌دست آورید.

۱۰ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۰ , ۳)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۱۱ اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، نشان دهید

الف) خط گذرا از نقاط $P(a , b)$ و $Q(b , a)$ همواره بر خط $y = x$ عمود است.

ب) نقطهٔ وسط پاره خط PQ همیشه بر روی خط $y = x$ واقع است.

۱۲ یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آنها در نقشهٔ ادارهٔ آموزش و پرورش به صورت $E(۳ , ۱۰)$ و $F(۲ , ۷)$ است. هدف آن است که هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانهٔ خود ثبت‌نام کند. معادلهٔ خطی را بنویسید که روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم کند.

درس دوم

تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجه دوم

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در کلاس دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یک جنبهٔ اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس بعدی به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد و نسبتاً متداول برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $(۳x^۲-۱)^۲-۱۳(۳x^۲-۱)+۲۲=۰$

حل : با وجود آنکه این معادله از درجهٔ ۴ می‌باشد، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت $(۳x^۲-۱)$، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$۳x^۲-۱=u \Rightarrow u^۲-۱۳u+۲۲=۰$$

معادلهٔ حاضر به روش کلی و همچنین به روش تجزیه قابل حل است.

(روش کلی)

$$\Delta=b^۲-۴ac$$
$$=(-۱۳)^۲-۴(۱)(۲۲)=۸۱$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۳\pm\sqrt{۸۱}}{۲(۱)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۲\Rightarrow(۳x^۲-۱)=۲\left\langle\begin{matrix}x=۱\\x=-۱\end{matrix}\right.\\ u=۱۱\Rightarrow(۳x^۲-۱)=۱۱\left\langle\begin{matrix}x=۲\\x=-۲\end{matrix}\right.\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-۲)(u-۱۱)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۲\Rightarrow(۳x^۲-۱)=۲\Rightarrow x^۲=۱\left\langle\begin{matrix}x=۱\\x=-۱\end{matrix}\right.\\ u=۱۱\Rightarrow(۳x^۲-۱)=۱۱\Rightarrow x^۲=۴\left\langle\begin{matrix}x=۲\\x=-۲\end{matrix}\right.\end{cases}$$

کار در کلاس

۱ معادله‌های مقابل را حل کنید.

ب) $(x+\frac{۱}{x})^۲+۲(x+\frac{۱}{x})=۸$ الف) $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰$

۲ الف) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که ریشه نداشته باشد.

ب) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد.

پ) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها دو ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ت) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که دقیقاً سه ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ث) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که چهار ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ج) آیا معادلهٔ درجه چهار می‌تواند بیش از چهار ریشه داشته باشد؟

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

0019

فعالیت کلاسی

می‌دانیم که معادلهٔ درجه دوم در حالت کلی به صورت زیر است

$$(1)\quad ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله در مورد وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c مختلف‌العلامت باشند، در مورد علامت Δ چه می‌توان گفت؟

ب) اگر a و c مختلف‌العلامت باشند آنگاه معادلهٔ (۱) دارای ...... ریشهٔ حقیقی متمایز است.

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برایمان اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[1]، یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

0020

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم $\quad 3x^2+5x-1=0$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=\ ......$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\ ......\\[2ex] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\ ......\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=\ ......$$

در اینجا ملاحظه می‌شود که $S=-\dfrac{b}{a}$.

۱ــ S حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل‌ضرب است.

پ) درستی این نتیجه را در مورد معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم.

$$3x^2-7x=0 \Rightarrow x(3x-7)=0 \left\langle \begin{array}{l} \alpha=\dots\dots \\ \beta=\dots\dots \end{array} \right.$$

$$S=\alpha+\beta=\dots\dots+\dots\dots=\frac{7}{3}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادله (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β خواهد بود:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} \end{array}\right\} \Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{\dots\dots}{\dots\dots}=\dots\dots$$

ث) با مفروضات قسمت (ت) ثابت کنید $\alpha.\beta=P=\dfrac{c}{a}$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right)=\dots\dots$$

با توجه به فعالیت بالا می‌توان گفت:

> اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a\neq 0)$ $\quad ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه
>
> $\alpha+\beta=S=-\dfrac{b}{a}$ و $\alpha.\beta=P=\dfrac{c}{a}$

کار در کلاس

۱ در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (S و P) را بیابید.

۲ در معادلهٔ $2x^2-9x+c=0$ مقدار c را طوری بیابید که یکی از ریشه‌ها دو برابر دیگری باشد. (راهنمایی: اگر یکی از ریشه‌ها را α بنامیم، ریشه دیگر به‌صورت $\beta=2\alpha$ خواهد بود. حال از مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده کنید).

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

گاهی حل یک مسئله، مستلزم آن است که برایش معادله‌ای بنویسیم و آن را حل کنیم؛ در برخی موارد، معادلهٔ مورد نظر از درجه ۲ خواهد بود. به‌عنوان نمونه با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجه ۲ (S و P) می‌خواهیم معادله را به دست آوریم.
برای این کار فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله α و β باشند؛ پس معادله به شکل زیر خواهد بود.

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$x^2-\beta x-\alpha x+\alpha\beta=0$$

$x^{۲}-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$

$x^{۲}-Sx+P=۰$

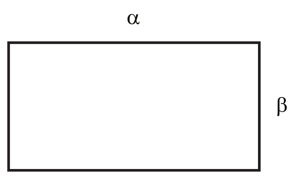
بنابراین نشان دادیم که :

> معادلهٔ درجهٔ دوم، با مجموع ریشه‌های S و حاصل‌ضرب ریشه‌های P به صورت $x^{۲}-Sx+P=۰$ می‌باشد.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط ۱۱ cm و مساحت ۶ $cm^{۲}$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.



حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

$$\text{محیط} = ۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta) = ۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۱۱}{۲}-\alpha$$

$$\text{مساحت} = ۶ \Rightarrow \alpha.\beta = ۶ \Rightarrow \alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha) = ۶$$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و α و β را بیابید.

ب) با استفاده از S و P این مسئله را حل کنید.

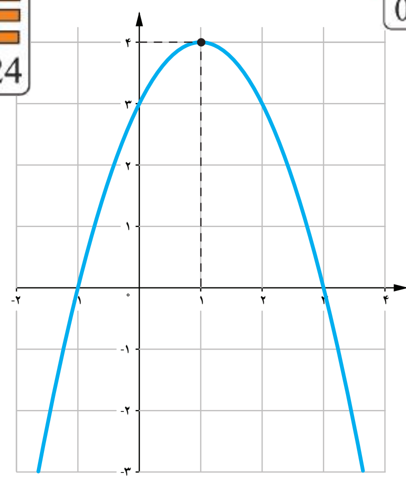
۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

ماکزیمم یا مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است و

الف) اگر $a>۰$ آنگاه سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

ب) اگر $a<۰$ آنگاه سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت.



مثال : بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^{۲}+۲x+۳$ را در صورت وجود مشخص کنید.

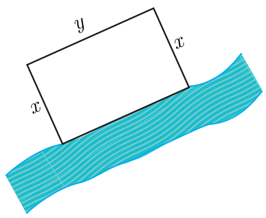
حل : این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار را خواهد داشت که برابر است با :

$f(۱)=۴$

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

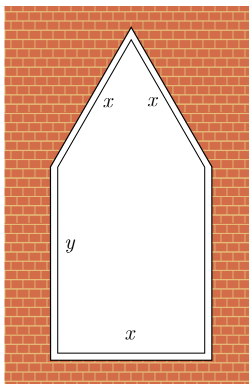
الف) $g(x)=-(x+۱)^۲+۳$ ب) $h(x)=x^۲-۴x+۹$



۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(**راهنمایی:** $y+۲x=۱۰۰ \Rightarrow y=۱۰۰-۲x$

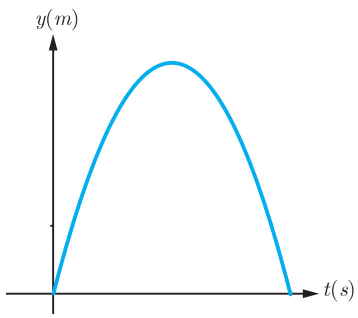
مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



۳ پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دربالای آن می‌باشد. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

صفرهای تابع درجه ۲

در کلاس دهم دیدیم که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c \ (a\neq ۰)$ یک سهمی است. به‌عنوان مثال نمودار مقابل، نمودار مکان ــ زمان گلولهٔ کوچکی است که در راستای قائم با سرعت اولیه $۲۰\ m/s$ به طرف بالا پرتاب شده است و ضابطه آن $y=-۵t^۲+۲۰t$ می‌باشد. نقاط برخورد نمودار این تابع با محور افقی کدامند و این نقاط از نظر فیزیکی چه معنایی دارند؟

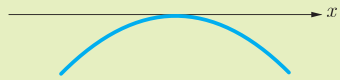
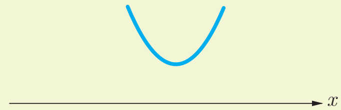


به‌طور کلی نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها، نقاط با اهمیتی هستند که آنها را صفرهای تابع می‌نامیم؛ چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود. همچنین محل برخورد نمودار تابع درجه دوم با محور yها، برابر $f(۰)$ یعنی c می‌باشد.

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه ۲ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن سهمی از روی علامت a قابل تشخیص است. جدول زیر را کامل کنید[۱].

۱ــ در این جدول محور yها رسم نشده است.

نمودار تقریبی سهمی با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$	علامت a	Δ
	$+$	$+$
	$-$	$+$
	$+$	0
	$-$	0
	$+$	$-$
	$-$	$-$

۲ برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی تابع درجه ۲ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در توابع زیر، تعداد و علامت ریشه‌های توابع داده شده را (در صورت وجود) مانند نمونه مشخص کنید.

الف) $y=x^2+6x+5$

$\Delta=16>0 \Rightarrow$ سهمی دو ریشه متمایز دارد

$p=\frac{c}{a}=5>0 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند

$S=-\frac{b}{a}=-6<0 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند

ب) $y=x^2+4x-5$

پ) $y=3x^2-7x+1$

ت) $y=-2x^2+5x-4$

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع f که در سمت چپ از ردیف اول توابع زیر آمده است را در نظر می‌گیریم:

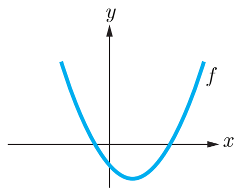
ـ سهمی رو به بالاست، پس a مثبت است.

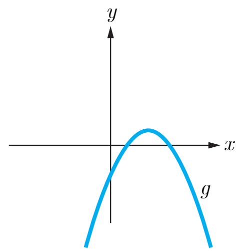
ـ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است پس c منفی است.

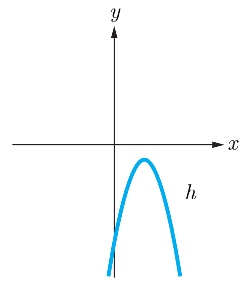
ـ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن xها مثبت‌اند پس

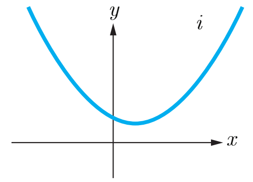
$$\frac{-b}{2a}>0 \rightarrow b<0$$

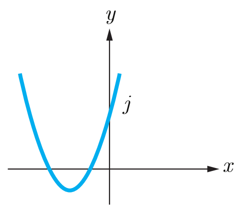
خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.

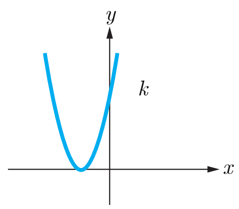


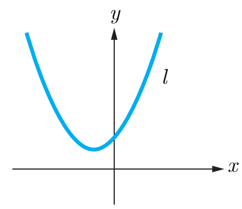


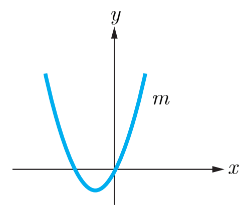


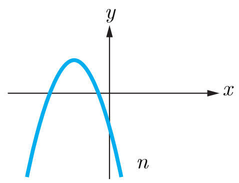


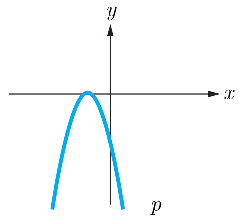


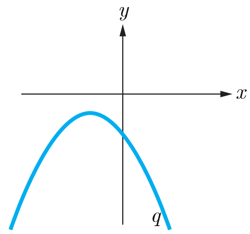


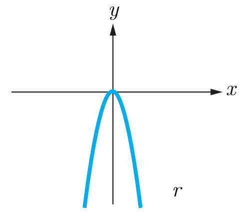












ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
b	−							+			−	
c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تمرین‌های درس دوم

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

پ) $(2x^2 - 1)^2 = 7 + 6(2x^2 - 1)$

ت) $2x^{\frac{2}{3}} + 7x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

ث) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} - 2 = 0$

۲) در معادلهٔ $4x^2 - 8x + c = 0$ مقدار c را به‌گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه دیگر باشد.

۳) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

۴) ماکزیمم یا مینیمم تابع‌های با ضابطه های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۵) راکتی که به‌طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن

$$h(t) = 100t - 5t^2 \qquad (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

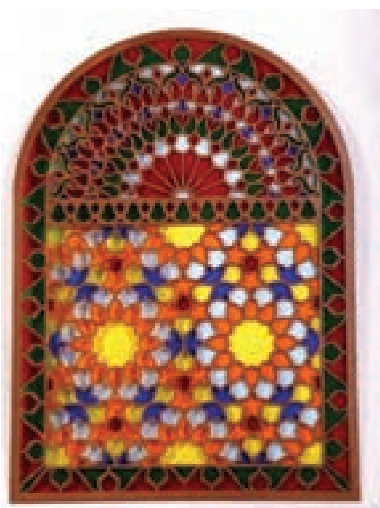
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟

۶) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که

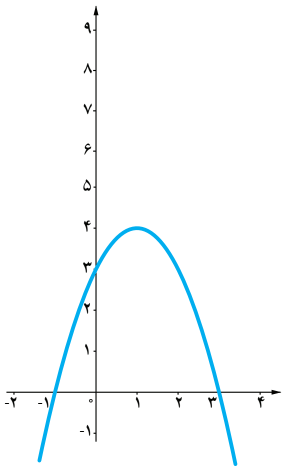
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

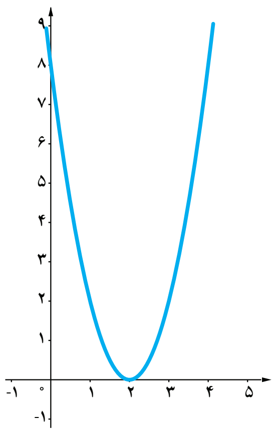
۷) در بسیاری از بناهای سنتی کشورمان، پنجره‌هایی به شکل مقابل وجود دارد که از یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای به قطر پهنای مستطیل در بالای آن تشکیل شده است. اگر محیط مستطیل ۴/۵ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری انتخاب کنید که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد.



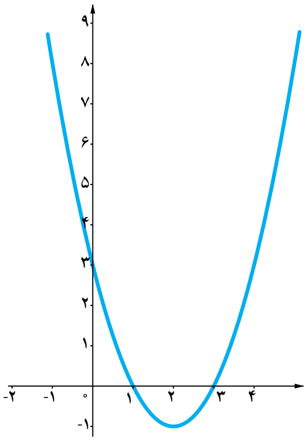
۸ معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.



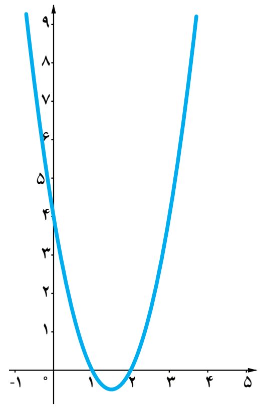
الف)



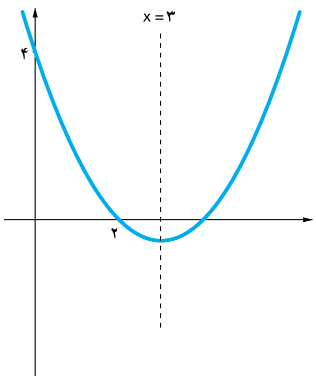
ب)



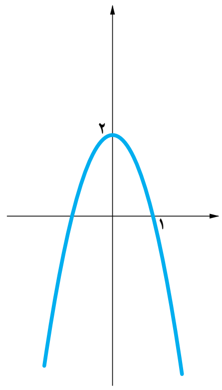
پ)



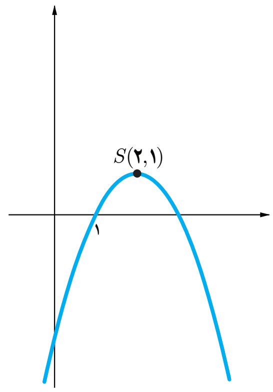
ت)



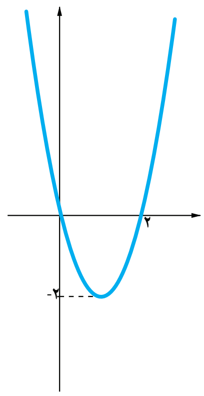
ث)



ج)



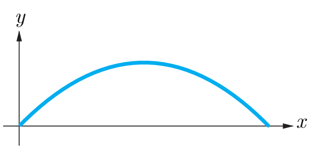
چ)



ح)

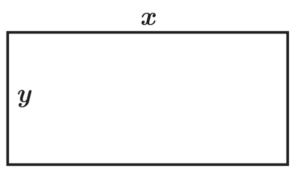
۹ تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ ریشه ندارد و حاصل $a + b + c$ عددی منفی است. ثابت کنید $c < ۰$.

۱۰ فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین با سرعت اولیهٔ $۲۰\ m/s$ شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = \frac{-۱}{۴۰}x^۲ + x$ می‌باشد. نقطهٔ برخورد توپ با زمین را به دست آورید.



درس سوم

معادلات گویا



مثال) مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر باشد با نسبت طول به عرض مستطیل. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$.

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند. عرض مستطیل را $y=۱$ در نظر می‌گیریم تا این نسبت را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم):

$$x^۲=x+۱$$

$$x^۲-x-۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۵ \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \begin{cases} \boxed{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=x} \\ \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $۵=۲+\square$ مواجه شدیم، تا همین درس گذشته، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مثل $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم:

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق نمایند.

فعالیت کلاسی

۱ معادله مقابل را حل کنید. (۱) $\frac{x}{x^{2}-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-2}{x^{2}-x}$

الف) ابتدا در صورتِ امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم :

(۲) $\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x+1)}=\frac{x-2}{\cdots\cdots}$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اولِ متمایز وجود دارد : x، $(x+1)$ و $(\cdots\cdots)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ..... است؛ پس ک‌م‌م مخرج‌ها عبارت است از ..... .

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1)\left[\frac{\quad}{(x-1)(x+1)}-\frac{\quad}{(x+1)}\right]=x(x-1)(x+1)\left[\frac{x-2}{x(x-1)}\right]$$

$$\Longrightarrow x^{2}-2x(x-1)=(x+1)(x-2)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $2x^{2}-3x-2=0$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول هستند؟ چرا؟

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار $10\ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{60}{v}$ به‌دست می‌آید؟

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

پ) معادلهٔ $\frac{1}{2}+\frac{60}{v}=\frac{60}{v-10}$ را توضیح دهید.

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^{۲}}-۱۲=۰$ ب) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^{۲}+۲k}$

پ) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^{۲}}$

۲ دبیر ریاضی آتیلا هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آتیلا جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود:

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آتیلا در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است.

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آتیلا باشد.

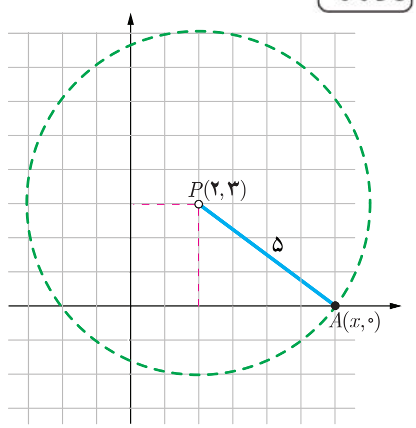
$$\frac{۹n+\cdots\cdots}{۵+\cdots\cdots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت قبل را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

۳ یک معادلهٔ گویا بنویسید که جملهٔ زیر را نقض کند:

جواب هیچ معادلهٔ گویا نمی‌تواند صفر باشد.

معادلات رادیکالی



مثال) نقطه‌ای روی محور xها بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

حل) فرض کنیم نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x و ۰)$ باشد. باید x را به‌دست آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_p)^{۲}+(y_A-y_p)^{۲}}=\sqrt{(x-۲)^{۲}+(۰-۳)^{۲}}$$

$$AP=۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-۲)^{۲}+۹}=۵ \qquad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[1].

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری به طرفین تساوی جابه‌جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با توان‌رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت :

$(x-2)^2+9=25$

$$(x-2)^2=16 \quad \Rightarrow \begin{cases} (x-2)=4 & \to x=6 \quad \Rightarrow A(6,0) \\ (x-2)=-4 & \to x=-2 \quad \Rightarrow B(-2,0) \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، مورد قبولند؟

(الف) $2\sqrt{2t-1}-t=1$ (ب) $2x=1-\sqrt{2-x}$

(پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$ (ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$

(ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

۲ زمانی که یک شیء از بالای ساختمان به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد می‌کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.
این جسم، یک ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۳ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی هستند؟

الف) $\sqrt{t}+2=0$ (پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

(ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

۱ــ در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجهٔ ۲ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۴ عددی صحیح بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

تمرین‌های درس سوم

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$

(ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$

(پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

(ت) $\sqrt{t+۴}=۳$

(ث) $k=\sqrt{۶k-۸}$

(ج) $x+\sqrt{x}=۶$

(چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

(ح) $\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۳ فرمول $T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ زمان نوسان (یک حرکت رفت و برگشت) پاندولی به طول l متر را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد. اگر هر نوسان یک پاندول ۱/۵ ثانیه زمان ببرد، مطلوب است محاسبهٔ طول آونگ. (مقدار g را برابر $۹/۸\ m/s^۲$ قرار دهید)

۴ اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

فصل ۲

هندسه

درس اوّل: ترسیم‌های هندسی

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

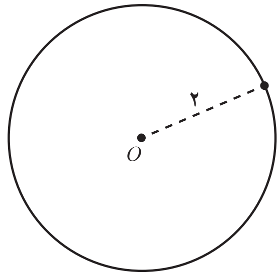
درس سوم: تشابه مثلث‌ها

درس اوّل

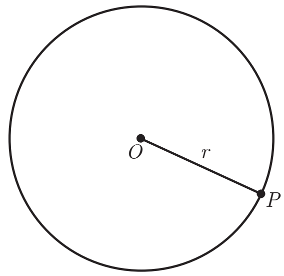
ترسیم‌های هندسی

فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

فعالیت کلاسی



۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه مانند O درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند را درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

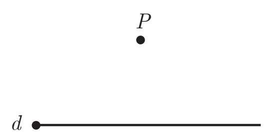


۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی این دایره درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

نتیجه : دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد .... دایره قرار دارد و هر نقطه که .... دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

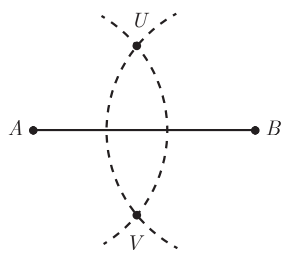
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص نمایید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟



۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد.

الف) تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ p هستند، مشخص نمایید.

ب) نقاطی از خط d را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص نمایید.

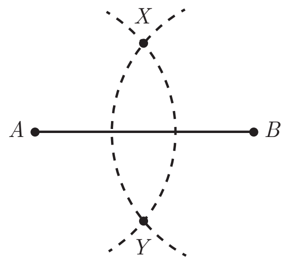


۶ دو نقطهٔ ثابت مانند A و B درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB بازکرده و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر از نقطهٔ B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاطی مانند U و V قطع کنند. نقاط U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۷ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان بزنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

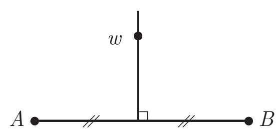
الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص نمایید.

ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.



برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

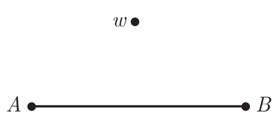
۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.



> **نتیجه۱ :** هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط ....

۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی : از W به A و B و به وسط AB وصل نمایید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)



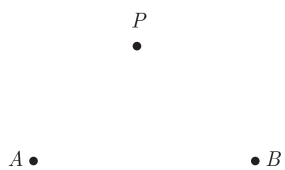
> **نتیجه ۲ :** هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد ....

> **نتیجه :** از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد .... و هر نقطه که .... روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی

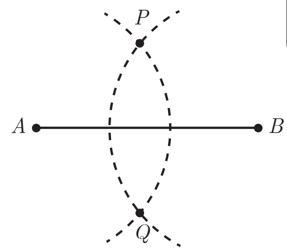
۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید بکشید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید بکشید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند.



۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



فرض کنید بخواهیم عمودمنصف پاره‌خط داده شدهٔ AB را رسم نماییم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB بازکرده و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم نمایید.

کار در کلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید به‌طوری که نقطهٔ M وسط A و B باشد.

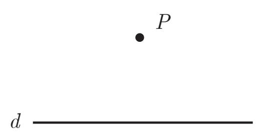
۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطهٔ ....

کار در کلاس

مراحل رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.

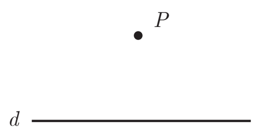
۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d .... و از نقطهٔ ....

0013 **کار در کلاس**

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.



0014 **رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن**

خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d موازی باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

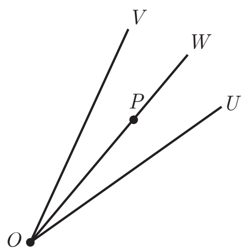
۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

0015 **کار در کلاس**

روش رسم خط موازی بایک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

0016 **برخی خواص نیمساز و ترسیم آن**

0008

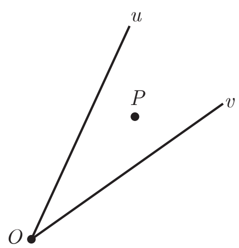


۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط OW نیمساز زاویهٔ VOU می‌باشد. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی OW باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ VOU یکسان است.
(یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر OV و OU رسم نماییم طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه ۱ : هر نقطهٔ روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه ....

0017

0009



۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ VOU یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه قرار دارد.
(**راهنمایی** : پاره‌خط OP و دو عمود از نقطهٔ P بر OU و OV رسم کنید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ UOV است.)

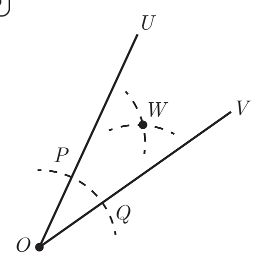
نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد ....

نتیجه : از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی .... یک زاویه قرار داشته باشد، .... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی .... آن زاویه قرار دارد.

۳ــ رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ UOV را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های OU و OV را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟



ب) دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول پاره‌خط PQ) و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند.

طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند.

پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم نمایید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

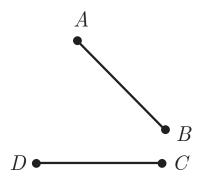
ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ UOV چه نوع پاره‌خطی است؟

کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

تمرین‌های درس اول

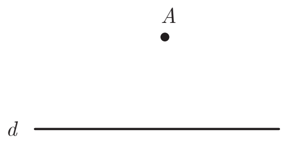
۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل مقابل اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.



ب) فرض کنید نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O بنامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصف BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رئوس چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



۴ الف) نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر، مانند شکل مقابل مفروض است. مثلثی متساوی‌الساقین رسم کنید که یک رأس آن نقطهٔ A و یک ضلع آن برخط d منطبق باشد.

ب) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸\text{cm}^۲$ باشد.

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

p 0021

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید.
می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.
می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق نماییم، کماکان تساوی برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم و یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، کماکان تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

p 0022

کار در کلاس

با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفر هستند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(طرفین وسطین) الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

(تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب) ب) $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(معکوس کردن تناسب) پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(تعویض جای طرفین یا وسطین) ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ $\quad(\frac{a}{c}=\frac{b}{d})$

(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $\quad(\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d})$

راهنمایی : در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دوطرف تساوی عدد ۱ را اضافه نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه نمایید.

(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج) ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ $\quad(\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d})$

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده سپس از دوطرف عدد ۱ را کم نمایید.

۲ــ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل نمایید.

الف) $\frac{5}{14}=\frac{15}{42}\Rightarrow 5\times \underline{\quad\quad} = 15\times \underline{\quad\quad}$

ب) $3\times 40=12\times 10\Rightarrow \frac{3}{\quad}=\frac{12}{\quad}$

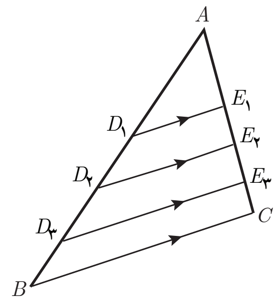
پ) $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}\Rightarrow \frac{10}{7}=\underline{\quad\quad}$

ت) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}\Rightarrow \frac{6}{18}=\underline{\quad\quad} \quad , \quad \frac{33}{11}=\underline{\quad\quad}$

ث) $\frac{4}{14}=\frac{10}{35}\Rightarrow \frac{18}{14}=\underline{\quad\quad} \quad , \quad \frac{4}{18}=\underline{\quad\quad}$

ج) $\frac{5}{12}=\frac{10}{24}\Rightarrow \frac{-7}{12}=\underline{\quad\quad} \quad , \quad \frac{5}{-7}=\underline{\quad\quad}$

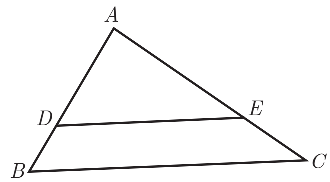
استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن



در شکل مقابل داریم $D_1E_1 \| BC$ و $D_2E_2 \| BC$ و $D_3E_3 \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $1 \le i \le 3$

ــ اندازه پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$\frac{AE_1}{E_1C}$	$\frac{D_2E_2}{BC}$	$\frac{AD_1}{D_1B}$
$\frac{AE_3}{E_3C}$	$\frac{D_3E_3}{BC}$	$\frac{AD_2}{D_2B}$
$\frac{AE_2}{E_2C}$	$\frac{D_1E_1}{BC}$	$\frac{AD_3}{D_3B}$



ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

ــــ = ــــ = ــــ

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

تالس

در پایه‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

> این نوع از استدلال که از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

> نوع دیگری از استدلال که با آن نیز در پایه‌های قبل آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

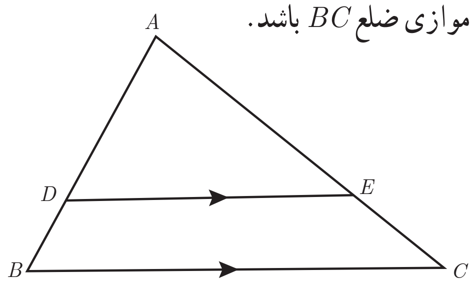
در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم ثابت خواهیم کرد.

p 0026

فعالیت کلاسی

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

I 0013



۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کرده و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کرده و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

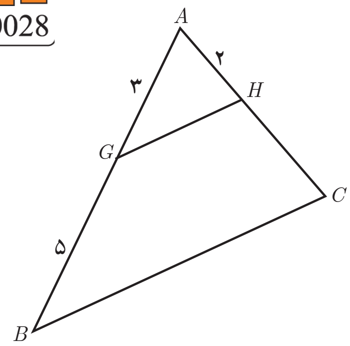
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟

p 0027

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند. نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس (توضیح) می‌باشد که همان‌گونه که مشاهده کردید رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید را مشخص می‌نماید.

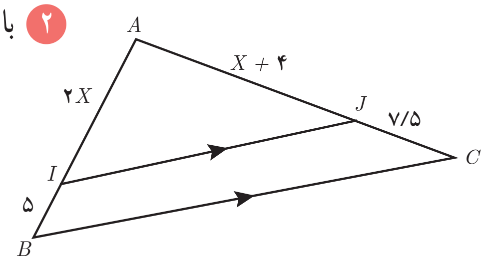
0028

کار در کلاس ۱



0014

۱ در شکل مقابل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



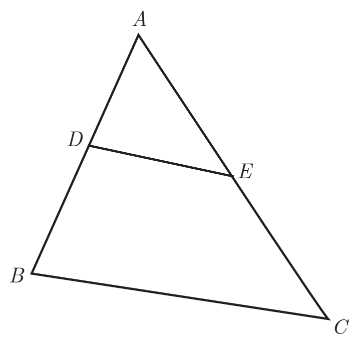
0015

۲ با تشکیل یک معادله مقدار X و سپس اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

0029

تعمیم قضیه تالس

فعالیت کلاسی



0016

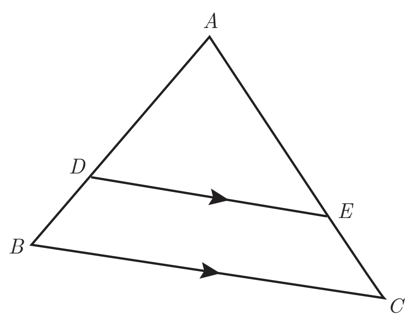
۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

ج) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

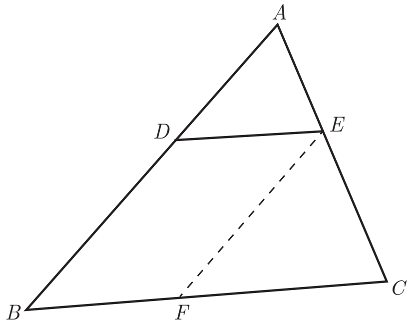
د) توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس می‌باشند.



0017

۲ در مثلث مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC می‌باشد. ابتدا تناسب معرفی شده در قضیه تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب، تناسب‌های دیگری که از آن می‌توان نتیجه گرفت را بنویسید.

$$\frac{AD}{DB}= \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}= \qquad \frac{BD}{BA}= \qquad \frac{AB}{BD}= \\ \frac{AD}{AB}= \qquad \frac{AB}{AD}= \end{cases}$$



I
0018

p 0030

۳

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیه تالس داریم : (۱) $\frac{AD}{AB} =$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم : (۲) $\frac{BF}{BC} =$

ج) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم : $\frac{AD}{AB} = \frac{\quad}{AC} = \frac{\quad}{BC}$

د) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی است؟

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=$

هـ) با توجه به قسمت‌های (ج) و (د) داریم :

(این رابطه تعمیم قضیه تالس می‌باشد) $\frac{AD}{AB} = \frac{\quad}{AC} = \frac{\quad}{BC}$

p 0031

کار در کلاس ۱

۱ در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص نمایید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AC}$

ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$

اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

p 0032

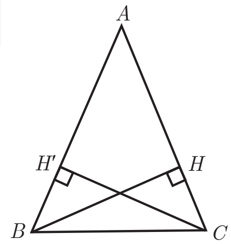
مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ــ با توجه به این مثال جاهای خالی را پر کنید.

مثال ۲ :



قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند،آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB=AC$

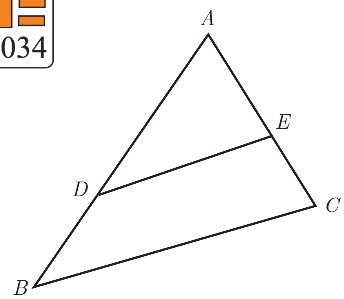
حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$

مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیراند.



فرض : $DE \parallel BC$

حکم : $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

لذا عکس قضیه تالس به‌صورت زیر می‌باشد :

فرض : $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

حکم : $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC می‌باشد. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبررا اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی ازچند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزارهٔ مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا سه‌شنبه است» و «ده عددی فرد است»، هر کدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا سه‌شنبه است و ده عددی فرد است» یک گزارهٔ مرکب است.

p 0036

مثال :

الف) جمله‌های زیرگزاره‌اند :

ــ علی به مدرسه آمد.

ــ ۲۳ عددی اول است.

ــ $100 < 0$

ــ عدد اول زوج وجود ندارد.

ب) موارد زیر گزاره نیستند :

ــ چه رنگ زیبایی!

ــ آیا قطرهای لوزی بر هم عمودند؟

ــ از روی صندلی بلند شو.

ــ شاعران فارسی زبان افراد خوبی هستند.

ــ آیا عدد ۴۳ اول است؟

ــ یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید.

p 0037

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست.

نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

p 0038

مثال :

الف) **گزاره :** «۲۳ عددی اول است»

نقیض آن : «چنین نیست که ۲۳ عددی اول باشد.» که معادل است با «۲۳ عددی اول نیست.»

ب)**گزاره :** «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a یا کوچک‌تر از b است و یا با b برابر است.»

پ) **گزاره :** «هر صندلی، چهار پایه دارد.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که هر صندلی چهار پایه داشته باشد.» که معادل است با «صندلی‌ای وجود دارد که چهار پایه ندارد.»

ت) **گزاره :** «یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن برابر 180° نیست.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که یک مثلث وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست». که معادل است با «هر مثلثی مجموع زوایای داخلی‌اش 180° است».

ث) گزاره : «هیچ کتابی بی‌ارزش نیست».

نقیض گزاره : «چنین نیست که هیچ کتابی بی‌ارزش نیست». که معادل با «کتابی وجود دارد که بی‌ارزش است».

0039

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی به‌کار برده می‌شود، **برهان غیر مستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

0040

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow$ B (حکم)

اثبات به روش برهان خلف :

$$\left.\begin{array}{ll} A & \text{درست} \\ & \text{و} \\ B & \text{نادرست} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}} \begin{cases} \text{۱ } A \text{ درست نیست} \\ \text{۲ تناقض منطقی} \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است. زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

0041

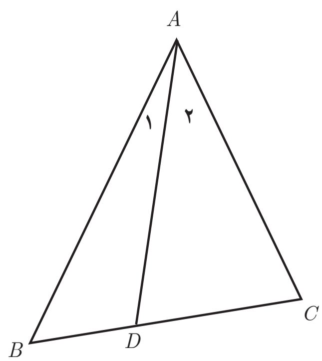
مثال : اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله غلط باشد یعنی n عددی فرد نباشد. لذا n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n=۲k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^۲=۴k^۲=۲(۲k^۲)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض می‌باشد. لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$، آن‌گاه $AB \neq AC$.



0021

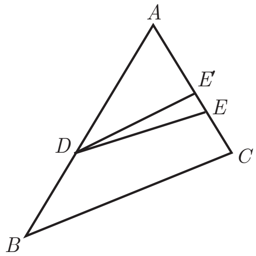
حل :

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم غلط باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ در این صورت خواهیم داشت $A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$ (چرا؟). از این همنهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ غلط بوده است. بنابراین $AB \neq AC$.

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنیم.

0042



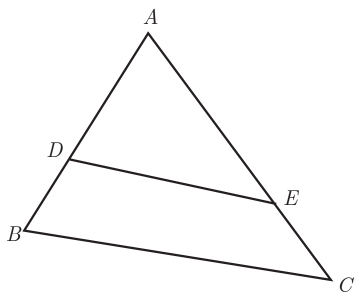
I 0022

عکس قضیهٔ تالس: اگر مانند شکل مقابل در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE\|BC$.

اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ و با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$.
حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE'}{AC}=\frac{AE}{EC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است زیرا $DE'\|BC$ و $DE \nparallel BC$. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد یعنی $DE\|BC$.

0043

قضیه‌های دو شرطی



I 0023

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند، بنابراین به‌طور مثال برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان آنها را به‌صورت زیر بیان کرد:

اگر $DE\|BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$[1] (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:
فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE\|BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

0044

مثال: در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال: در یک مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند، لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند» این یک حکم کلی در مورد تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که از آن برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال فیلدز[۲] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید. اگر شما حتی یک فرد ایرانی که مدال فیلدز گرفته است را برای او مثال بزنید در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهید دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. در چنین مواقعی که حکمی کلی برای تمام اعضای یک مجموعه بیان می‌شود. آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد. در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آورده شده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی در مورد تمام اعداد اول)

ب) «در هر متوازی‌الاضلاع اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام متوازی‌الاضلاع‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت نمایید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین **مثال نقض** رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟

آیا اگر برای رد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، باید درستی آن را بپذیریم؟ برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه نماییم.**» دربارهٔ گزینهٔ

۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند، تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. و در سال ۲۰۱۴ به ریاضی‌دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت.

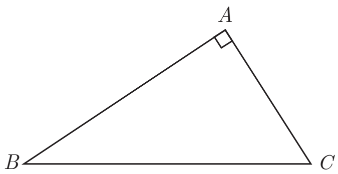
پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

p 0047

تمرین‌های درس دوم

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



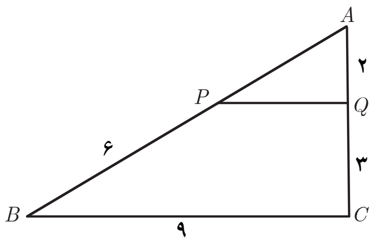
I 0024

۲ در هر مورد زیر مشخص کنید نسبت $\frac{a}{b}$ برابر با چه عددی است؟

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

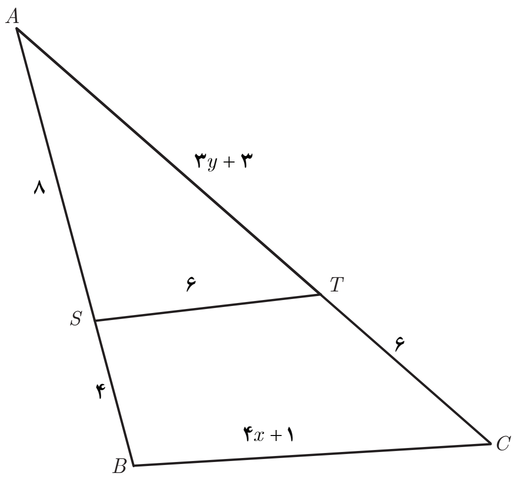
۳ حکمی ارائه کنید که درست نباشد ولی بتوان برای توجیه آن استدلال استقرایی آورد. استدلال استقرایی موردنظرتان را بیان نمایید.

۴ در شکل مقابل $PQ||BC$، طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



I 0025

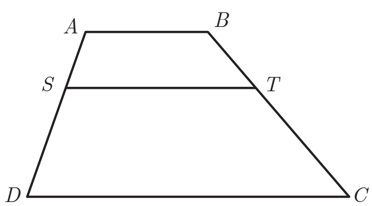
۵ در شکل مقابل $ST||BC$، مقادیر x و y را به‌دست آورید.



I 0026

۶ در ذوزنقه مقابل $AB||ST||DC$، ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(**راهنمایی** : یکی از قطرها را رسم کنید.)



I 0027

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه داده شده است را بنویسید.
الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.
ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در اینصورت زوایای مقابل برابرند.
ج) اگر رأس‌های یکی چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در اینصورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.
د) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر». (**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ گزاره بودن یا نبودن و دلیل آنرا در هر مورد مشخص نمایید.
الف) چه کوه بلندی!
ب) آیا ۵ عددی اولی است؟
پ) ۷=۴
ت) قد هیچ انسانی از ۲ متر بلندتر نیست.
ث) ثابت کنید عدد ۳ فرد است.
ج) هر مثلث ۴ رأس دارد.

۹ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.
الف) ۴>۷
ب) هیچ مثلثی با سه ضلع نابرابر وجود ندارد.
پ) ۸ ≤ ۱۷
ت) تمام والیبالیست‌ها از تمام فوتبالیست‌ها بلندترند.

۱۰ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط دو عمود بر آن خط رسم کرد.

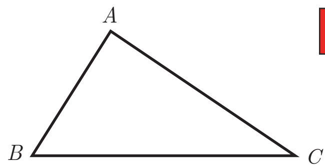
۱۱ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.
الف) هیچ عدد اولی که بزرگ‌تر از ۱۲۷ باشد وجود ندارد.
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.
پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

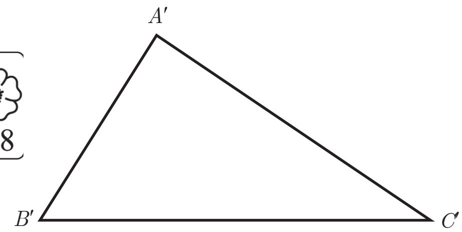
درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A'} \text{ و } \hat{B}=\hat{B'} \text{ و } \hat{C}=\hat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



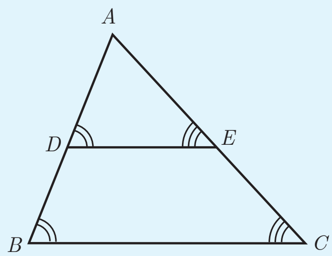


در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است.

دراین‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲ــ با توجه به قضیه تالس داریم :

$$\frac{AD}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{DE}{\cdots}$$

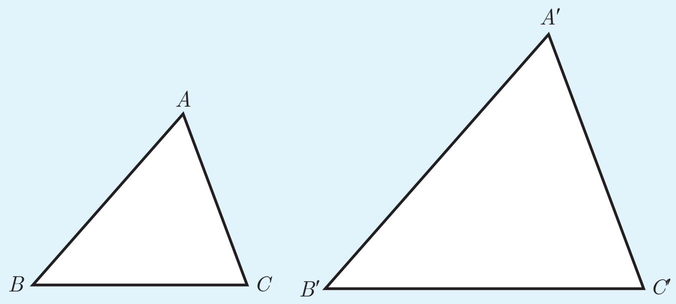
۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

$$A\overset{\Delta}{D}E\sim A\overset{\Delta}{B}C$$

با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها که بیان شد می‌توان سه قضیهٔ بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مد نظر نمی‌باشد در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

0052

قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

0053

قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},\hat{A}=\hat{A}'\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

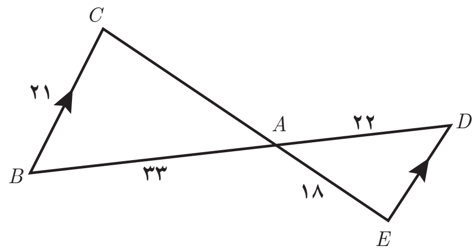
0054

قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

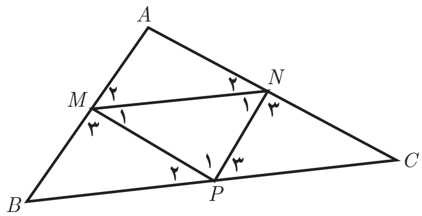
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس

۱ درشکل مقابل اندازهٔ پاره خط CE برابر ۴۵ سانتی‌متر است و $BC \| DE$.
اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید



۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، در مورد مثلث‌های ABC و MNP چه می‌توان گفت؟



حل :

الف) $MN \| BC$ و $NP \| AB$ و $MP \| AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$ و $\hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$ (چرا؟)

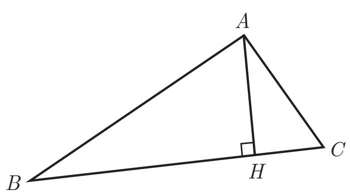
از (ب) در مورد مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ اگر سه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ به گونه‌ای باشند که $\overset{\Delta}{ABC} \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$ ، در مورد دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت کلاسی

فرض کنید مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

۲ نشان دهید دو زاویه مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

۳ از (۱) و(۲) در مورد مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{\cdots} = \dfrac{AC}{\cdots} = \dfrac{HC}{\cdots} \Rightarrow AC^{۲} = \cdots \times \cdots$

۵ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \dfrac{AH}{\cdots} = \dfrac{AB}{\cdots} = \dfrac{HB}{\cdots} \Rightarrow AB^{۲} = \cdots \times \cdots$

۶ $\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{\cdots} = \dfrac{AC}{\cdots} = \dfrac{HC}{\cdots} \Rightarrow AH^{۲} = \cdots \times \cdots$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC بنویسید.

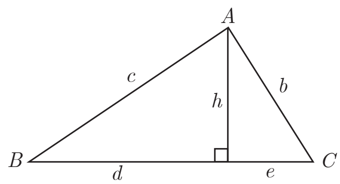
$BC^{۲} = \cdots\cdots + \cdots\cdots$

۸ مساحت مثلث ABC به دو طریق محاسبه کنید و با توجه به آن تساوی زیر را کامل نمایید.

$AB \times \cdots\cdots = AH \times \cdots\cdots$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با کمترین محاسبه ممکن از داده‌ها استفاده کنید و مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱ $h=۵$ $\quad d=۷$ $\quad e=?$

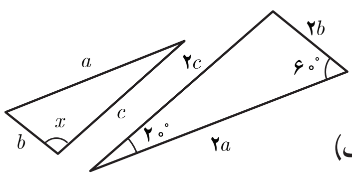
۲ $d=۵$ $\quad e=۳$ $\quad b=?$ $\quad c=?$

۳ $c=۸$ $\quad b=۶$ $\quad h=?$

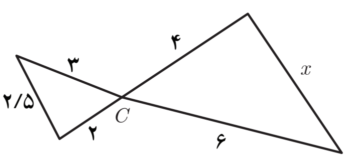
تمرین‌های درس سوم

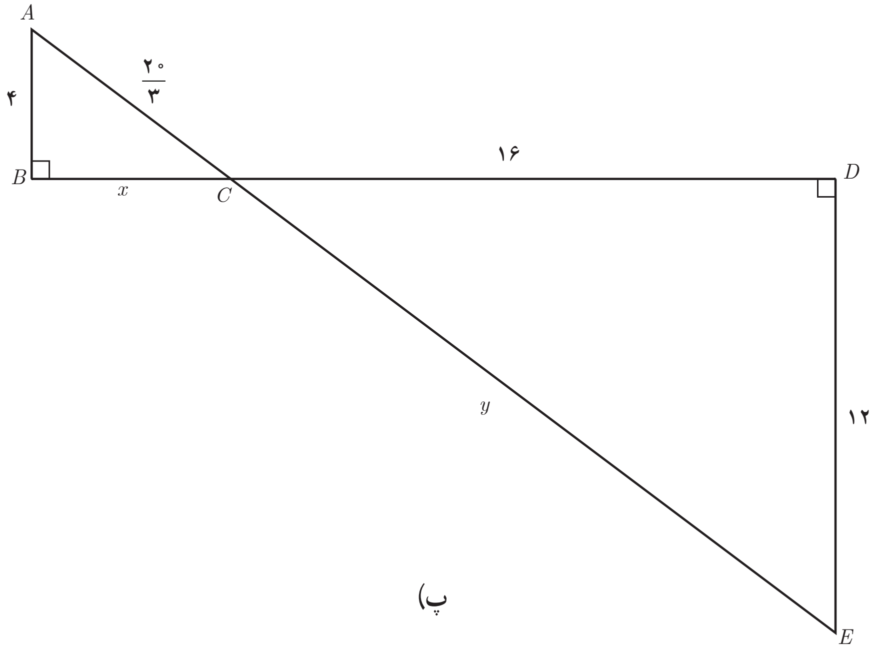
۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

الف)



ب)





پ)

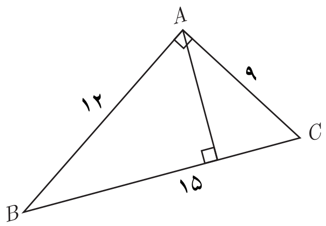
۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.

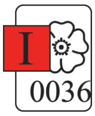
الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

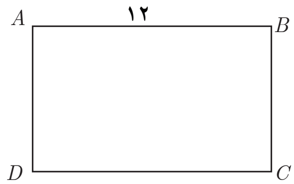
پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

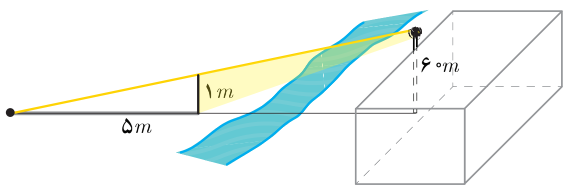


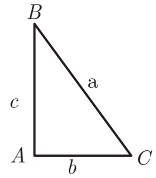


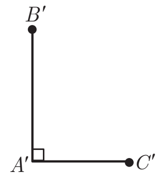
۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه نمایید.



۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است (مانند شکل) فردی که در طرف دیگر رودخانه است می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایه نورافکن محاسبه نماید. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌نماید که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مزد تا پای نورافکن چقدر است؟







۵ (تمرین ۸ صفحه ۴۴ از کتاب هندسه پایهٔ دهم رشته ریاضی)

با قضیه فیثاغورس آشنا شوید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱ــ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$. بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

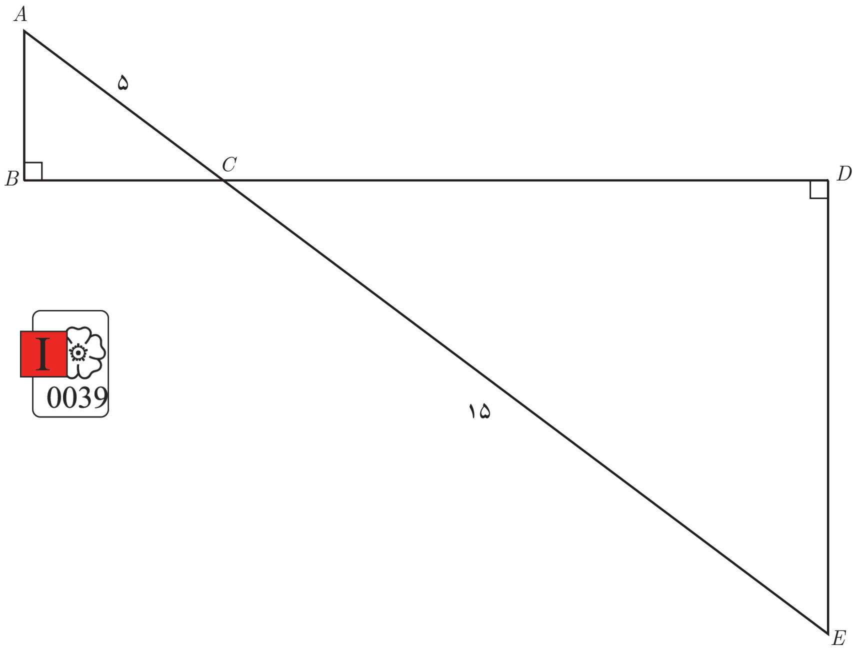
۲ــ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.

۳ــ با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

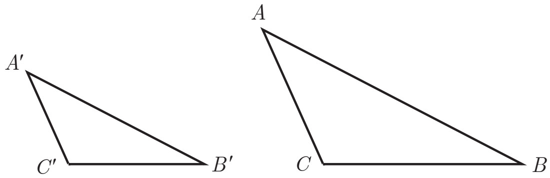
۴ــ توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

۶ در شکل زیر دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



۷ دو مثلث دلخواه به نام‌های ABC و $A'B'C'$ را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که متشابه با نسبت تشابه K باشند و داشته باشیم $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$. ارتفاع‌های AH و



A'H' را در دو مثلث رسم نمایید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

۸ دو n ضلعی دلخواه را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متشابه با نسبت تشابه K باشند ورئوس آنها را به دلخواه نام‌گذاری نمایید.

الف) نسبت محیط‌های دو n ضلعی را به هم محاسبه نمایید.

ب) نسبت مساحت‌های دو n ضلعی را به هم محاسبه نمایید. (**راهنمایی** : برای محاسبهٔ مساحت هر کدام از چند ضلعی‌ها می‌توانید یک رأس را به تمام رئوس غیرمجاور با آن رأس وصل نمایید و به‌جای مساحت n ضلعی مساحت مثلث‌های ایجاد شده را محاسبه نمایید.)

فصل ۳

تابع

p 0001

درس اوّل

آشنایی با برخی از انواع توابع

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک به یک

درس سوم

اعمال جبری روی توابع

نکاتی دربارهٔ تابع

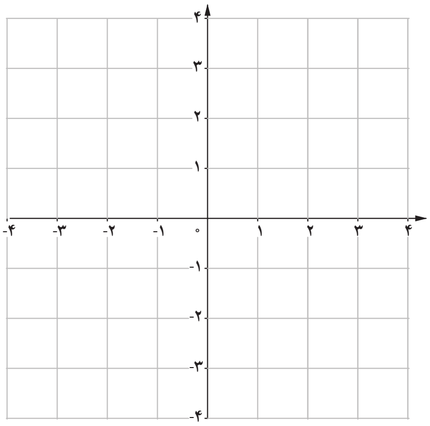
در سال گذشته با تعریف تابع آشنا شدید.

۱ــ الف) در شکل مقابل نمودار یک تابع را رسم کنید.

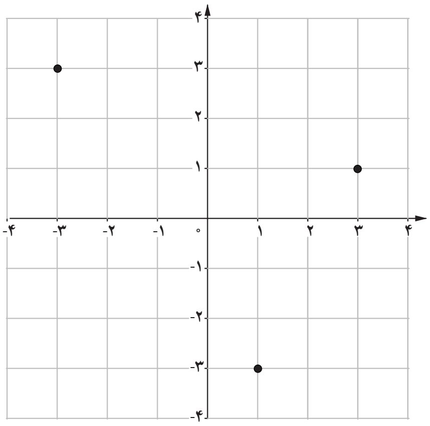
ب) چرا شکلی که رسم کرده‌اید، یک تابع است؟

چون هر خط موازی محورِ ....، نموداری را که رسم کرده‌ام، حداکثر در .... نقطه قطع می‌کند.

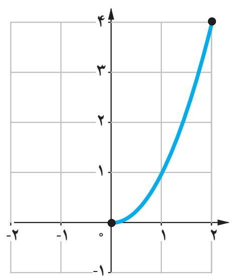
پ) در همان شکل، با رنگی متفاوت شکلی رسم کنید که تابع نباشد.

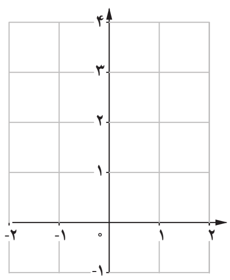


۲ــ تابعی در شکل مقابل رسم کنید که از سه نقطهٔ آبی داده شده بگذرد.



۳ــ در شکل داده‌شده، تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ در محدودهٔ $0\le x\le 2$ رسم شده است. این تابع را در محدودهٔ $-2\le x\le 2$ رسم کنید.





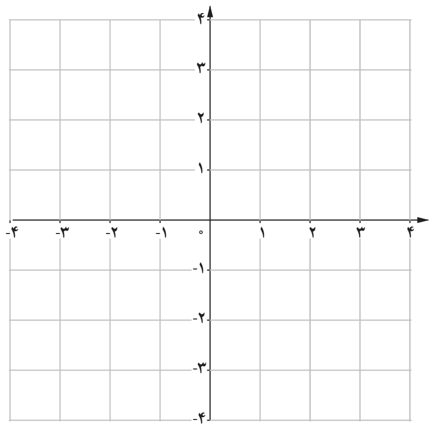
اگر تابعی داشته باشیم، گاهی تنها نیاز به مطالعهٔ بخش خاصی از نمودار آن تابع داریم. در این حالت تنها به بخش خاصی از دامنهٔ آن اشاره می‌کنیم. برای مثال با اینکه می‌دانیم که (در بعضی از نقاط کرهٔ زمین) رابطهٔ جرم(m) و وزن(w) به صورت $w=9/8\,m$ است ولی واضح است که برای بررسی این تابع نیاز به بررسی همهٔ نقاط دامنهٔ آن نداریم، بلکه کافی است دامنهٔ این تابع را در محدودهٔ همهٔ اعداد نامنفی در نظر بگیریم. بنابراین برای مشخص کردن یک **تابع**، نیاز به دانستن **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن داریم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگترین دامنهٔ ممکن را برای آن در نظر می‌گیریم.

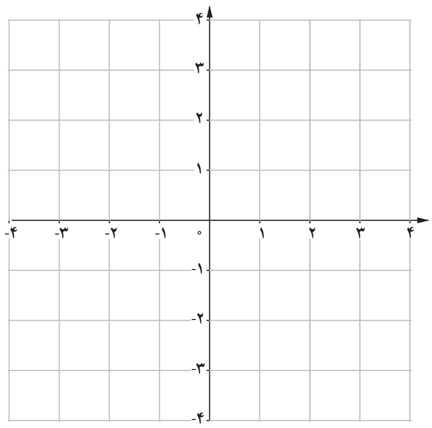
کار در کلاس

۱ ضابطهٔ یک تابع $f(x)=|x|+۱$ است. نمودار آن را در هر یک از حالات داده شده، به ترتیب از چپ به راست، رسم کنید.

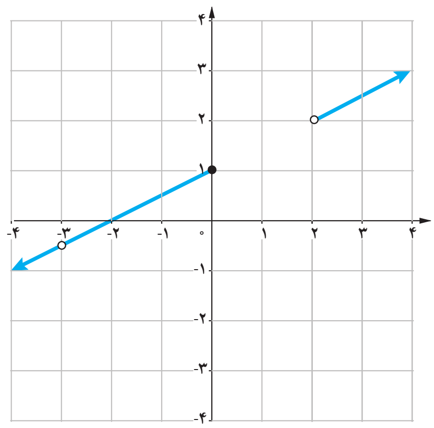
الف) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{۱\}$ است.

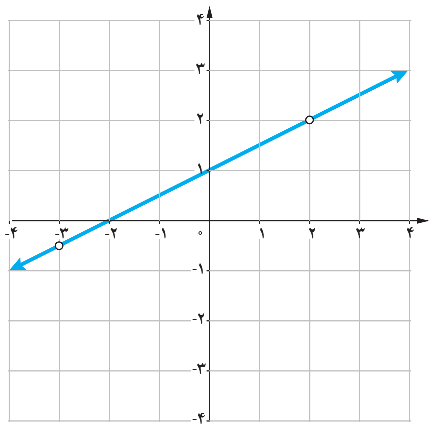
ب) دامنهٔ این تابع $[-۱,۰)\cup[۲,۳)$ است.

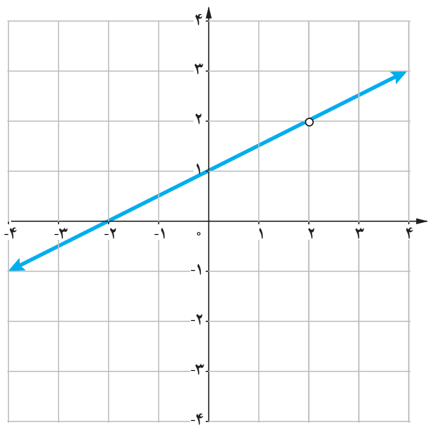




۲ با توجه به نمودارهای داده شده، دامنه و ضابطهٔ توابع زیر را بنویسید.







دامنهٔ تابع :
ضابطهٔ تابع :

دامنهٔ تابع :
ضابطهٔ تابع :

دامنهٔ تابع : $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$
ضابطهٔ تابع :

درس اوّل

آشنایی با برخی از انواع توابع

فعالیت کلاسی

توابع گویا

حسین که در پایهٔ یازدهم درس می‌خواند، در روستای کوچکی زندگی می‌کند. روستایی که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پر تردد ایران است. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که دیگر در این روستا به دلیل مشکلات کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم روستا از درآمد کافی برخوردار نیستند. حسین تصمیم گرفت این وضع زندگی را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب بخشی از مردمی که قصد گردشگری دارند و در تردد بین جادهٔ اصلی کنار روستا هستند را به آنجا بکشاند. این گردشگران برای پذیرایی محلی و تجربهٔ چالش برانگیز یک زندگی روستایی هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخهٔ اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع این کار به حدود ده میلیون تومان نیاز است و البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ایدهٔ خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید که (هم خیر دنیا دارد و هم خیر آخرت)، یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند به نسبت مساوی از پس‌انداز خود در به وجود آوردن یک کار اقتصادی سهیم باشند.

۱ــ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، حسین و او هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	۱	$\frac{۱}{۲}$								

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، کدام‌یک از دو رابطهٔ زیر مشخص می‌کند که باید هر داوطلب چه مقدار پول، بر حسب

ده‌میلیون تومان، بپردازد؟

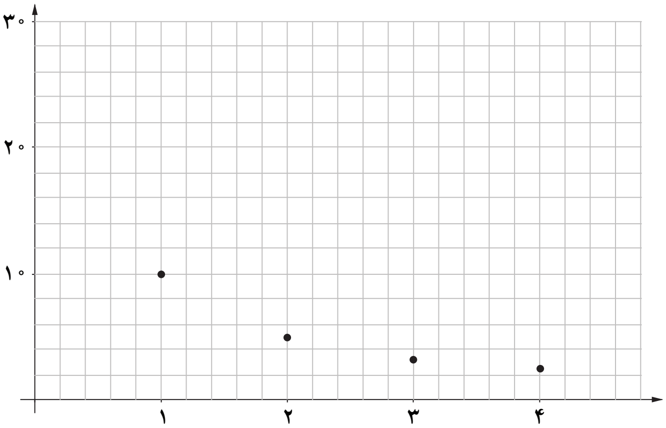
$\frac{۱}{n} =$ سهم مشارکت هر داوطلب　　　　$\frac{n}{۱} =$ سهم مشارکت هر داوطلب

پ) رابطهٔ سهم مشارکت هر داوطلب، یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟　　$f(x) = \dots$

۲ــ در شکل، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. این نمودار چه چیز را نشان می‌دهد؟

الف) «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☐ افزایش ☐ می‌یابد.»

ب) «با کاهش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☐ افزایش ☐ می‌یابد.»



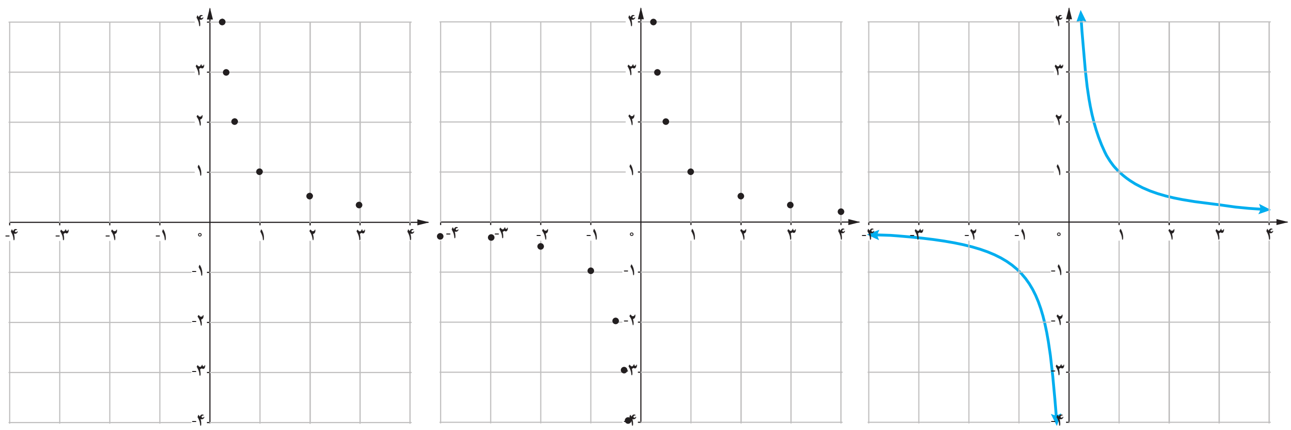
فعالیت کلاسی

۱ در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ برای دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها، با کدام دامنه مطابقت دارد؟

الف) $D_f = \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ب) $D_f = (\mathbb{Z} - \{۰\}) \cup \left\{ \frac{۱}{n} , \frac{-۱}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

پ) $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$



۲ عبارت زیر را کامل کنید.

چون مخرج کسر $\frac{۱}{x}$ نمی‌تواند …… باشد، پس …… نمی‌تواند در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ باشد، بنابراین نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ محور طول‌ها ☐ عرض‌ها ☐ را قطع نمی‌کند.

۳ با نگاهی دوباره به صفحهٔ قبل و تابع سهم مشارکت به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر پنجاه نفر بخواهند سهم مشارکت داشته باشند، سهم هر داوطلب چقدر می‌شود؟

ب) اگر صد نفر بخواهند سهم مشارکت داشته باشند، سهم هر داوطلب چقدر می‌شود؟

پ) اگر هزار نفر بخواهند سهم مشارکت داشته باشند، سهم هر داوطلب چقدر می‌شود؟

ت) آیا ممکن است تعداد افرادی که بخواهند در این طرح شرکت کنند آنقدر زیاد باشد که سهم مشارکت هر داوطلب صفر شود؟

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ جاهای خالی را پر کنید.

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای با طول .... باشد، پس

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ محور طول‌ها ☐ عرض‌ها ☐ را قطع نمی‌کند.

۵ آیا نمودار این تابع را بدون اینکه قلم را از روی کاغذ برداشت و تنها با یک حرکت قلم می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

0007

به تابعی که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چند جمله‌ای باشد و $q(x)\neq ۰$ (یعنی $q(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد)، **تابع گویا** می‌گویند.

همهٔ توابع $f(x)$ که ضابطه‌شان را بتوان به صورت یک عبارت گویا (که در سال پیش با آن آشنا شدید) بیان کرد، مثال‌هایی از توابع گویا هستند. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌ای از توابع گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x+۳}{(x+۱)(x-۲)} \qquad f(x)=\frac{x}{x+۵}$$

$$f(x)=\frac{۶}{x^{۲}-۱} \qquad f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$$

$$f(x)=۲ \qquad f(x)=\sqrt{۵}x$$

0008

کار در کلاس

بررسی عملکرد موفقیت، کاربردی از توابع گویا

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد»

0009

آلودگی رودخانه، کاربردی از توابع گویا

هزینهٔ پاکسازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاکسازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول داده شده را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاکسازی خواهد شد؟

پ) چرا امکان ندارد که ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاکسازی شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

اوست. برای این کار برای هر بازیکن، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق به همهٔ پرتاب‌های آزاد را حساب می‌کنند. شبنم که در تیم بسکتبال است، یک بازیکن موفق است زیرا تا اینجا، در مسابقات امسال، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب موفق داشته است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد از این هم بهتر عمل کند.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد شبنم موفق باشد، تابع محاسبهٔ پرتاب‌های آزاد موفق او را به دست آورید.

ب) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد شبنم بالای ۸۰ درصد خواهد شد؟

p 0010

دامنهٔ توابع گویا

همچنان که عدد صفر نمی‌توانست در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{x}$ باشد، دامنهٔ توابع گویای دیگر هم ممکن است شامل همهٔ اعداد حقیقی نباشد. برای مثال برای تعیین دامنهٔ $f(x)=\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$ می‌نویسیم :

$$D_f=\{x\mid(x+1)(x-2)\neq 0, x\in\mathbb{R}\}=\{x\mid x\in\mathbb{R}-\{-1,2\}\}$$
$$=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

p 0011

کار در کلاس

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

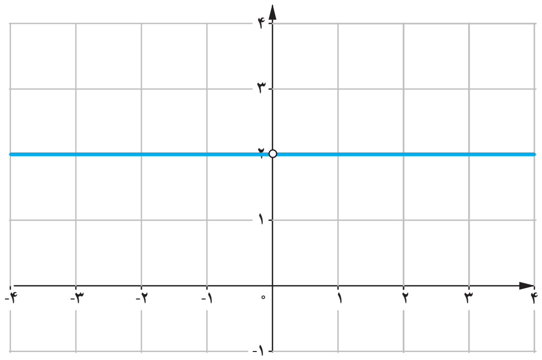
$D_f=$	$f(x)=\frac{3}{x-4}$	$D_f=$	$f(x)=\frac{x}{x+5}$
$D_f=$	$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$D_f=$	$f(x)=\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$
$D_f=$	$f(x)=2$	$D_f=$	$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{x^2+x+2}$

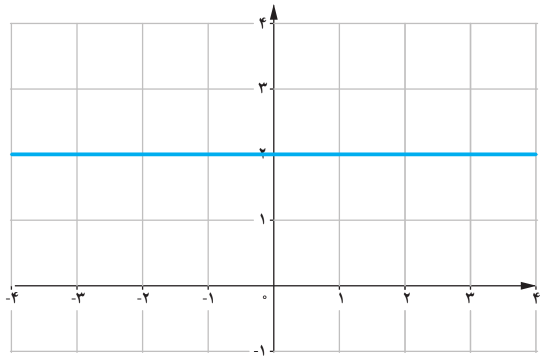
p 0012

تساوی دو تابع

برای اینکه دو تابع با هم **مساوی** یا **برابر** باشند، باید دامنهٔ دو تابع برابر باشند و روی نقاط (یا اعضای) این دامنه، ضابطهٔ دو تابع هم برابر باشند. به عبارت دیگر در صورت رسم دو تابع، باید نمودار آنها روی هم قرار گیرد.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x}{x}$ و $g(x)=۲$ دقت کنید.





با اینکه نمودار دو تابع تقریباً در همهٔ نقطه‌ها روی هم می‌افتند، ولی کاملاً روی هم نمی‌افتند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و داریم :

$$f(x)=\frac{۲x}{x} \qquad\qquad g(x)=۲$$

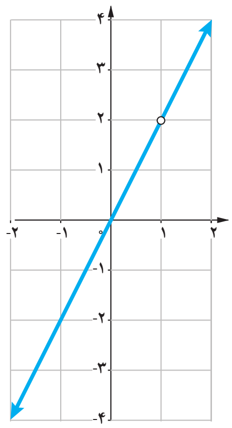
ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم :

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_g=\mathbb{R}$$

بنابراین نمودار دو تابع کاملاً روی هم قرار نمی‌گیرند و در نتیجه دو تابع با هم برابر نیستند.

همیشه به یاد داشته باشید که در هنگام ساده کردن ضابطهٔ توابع گویا، دامنهٔ تابع را حساب کنید.



کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ با هم برابر هستند یا خیر؟

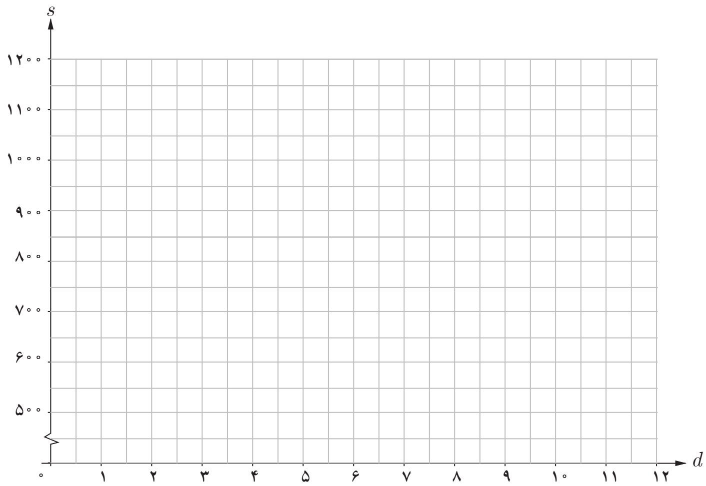
۲ به نمودار تابع f دقت کنید. اگر $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ ، ضابطهٔ g چه باشد تا $f=g$؟

بندر سیراف شهری باستانی واقع در بخش مرکزی شهرستان کنگان در استان بوشهر یکی از آثار تاریخی و از نقاط دیدنی این استان است. این بندر یکی از قدیمی‌ترین بنادر ایران است که زمانی دارای رونق فراوانی بوده است. در آن زمان شهر باستانی «سیراف» که سیصد هزار نفر جمعیت داشت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا) و سرتاسر دنیای آن روزگار از جمله کانتون چین (در شرق آسیا) داشت. با این همه زمین لرزه مرگبار هفت روزه‌ای، در سال ۳۵۷ هجری شمسی ویران شدن کامل این بندر را در پی‌داشت. آثار به جا مانده از بندر سیراف هنوز هم مورد توجه باستان‌شناسان ایرانی و خارجی است.

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر s تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، آن را می‌توان از رابطهٔ $s = ۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در این رابطه d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.



الف) با کامل کردن جدول داده شده، و وصل کردن نقاط به‌دست آمده، نمودار تقریبی تابع سونامی را رسم کنید.

d	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$s = ۳۵۶\sqrt{d}$		تقریباً ۵۰۳	تقریباً ۶۱۷		تقریباً ۷۹۶	تقریباً ۸۷۲	تقریباً ۹۴۲	تقریباً ۱۰۰۷		تقریباً ۱۱۲۶

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

پ) چون هر عدد، تنها .... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی

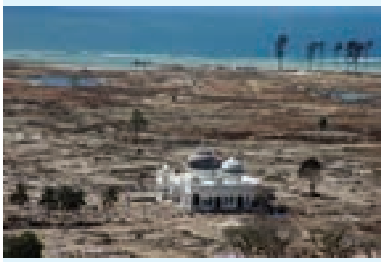
یک تابع است. ☐

یک تابع نیست. ☐

ت) در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق سؤال «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» را باید با کمک پژوهش‌های باستان شناسی و زمین‌شناسی یافت. با این همه با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس که حدود ۵۰ متر است، شما چه نظری می‌توانید بدهید؟

سونامی (و یا به زبان فارسی آب‌لرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود که در پی زمین لرزه‌های زیر دریا یا بر اثر لغزیدن صخره، یا یک انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، ایجاد شود. آبی که به لرزه درآمده است، به‌شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها رسیده و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی موقعی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب به‌سرعت مرتفع می‌شود. سرعت موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

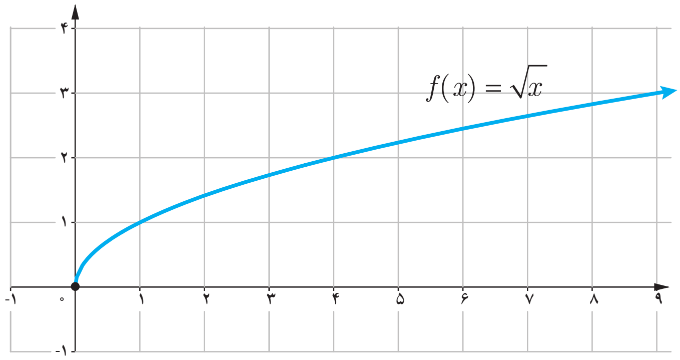
یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۲۰۰۴ میلادی در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیم شد و نزدیک ۲۳۰ هزار نفر را به کام مرگ کشاند. یکی از عکس‌های تکان‌دهندهٔ آثار این سونامی، ساختمان مسجدی سفید رنگ را نشان می‌داد که چندان خسارتی ندیده بود، در حالی که اثری از خانه‌هایی که تا پیش از آن دور تا دور این مسجد بنا شده بودند، دیده نمی‌شد.



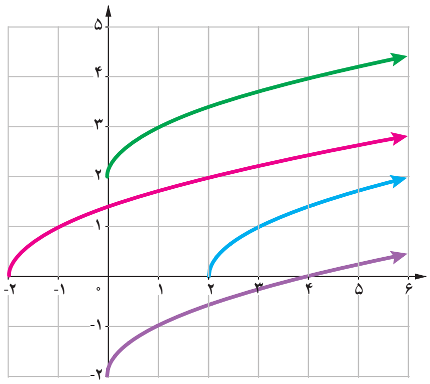
درازگودال «ماریانا» (واقع در اقیانوس آرام) عمیق‌ترین نقطه روی پوستهٔ کرهٔ زمین است. حداکثر عمق آن از سطح دریا ۱۰۹۹۴ است.

علت مطالعهٔ **توابع رادیکالی** مانند $s = ۳۵۶\sqrt{d}$ نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از انواع خاصی از توابع رادیکالی آشنا می‌شوید. همان‌طور که در هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشند.

می‌توان گفت که ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع همهٔ اعداد نامنفی است. نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است.



فعالیت کلاسی



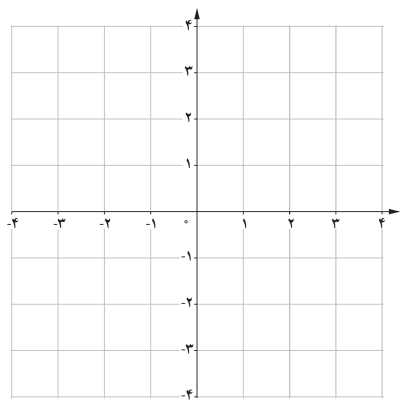
۱ با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر را بیابید؛ و سپس دامنهٔ هر یک را تعیین کنید.

$a(x) = \sqrt{x} + ۲$ $c(x) = \sqrt{x - ۲}$

$b(x) = ۲$ $d(x) = \sqrt{x + ۲}$

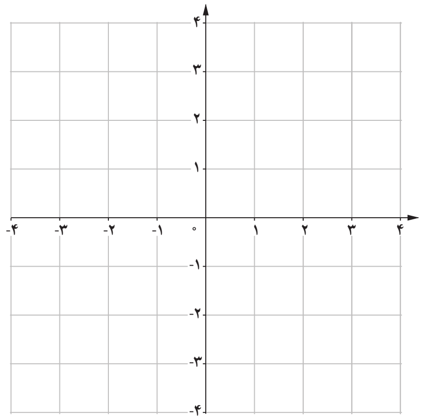
۲ می‌خواهیم تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + \sqrt{x - ۳}$ را رسم کنیم و سپس دامنهٔ آن را به‌دست آوریم.

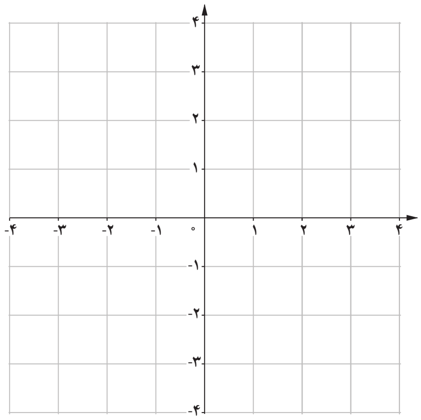
الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$ را رسم کنید.



ب) (مرحلهٔ دوم) با کمک پاسخ مرحلهٔ اول، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-۳}$ را رسم کنید.

پ) (مرحلهٔ سوم) با کمک پاسخ مرحلهٔ دوم، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sqrt{x-۳}$ را رسم کنید.



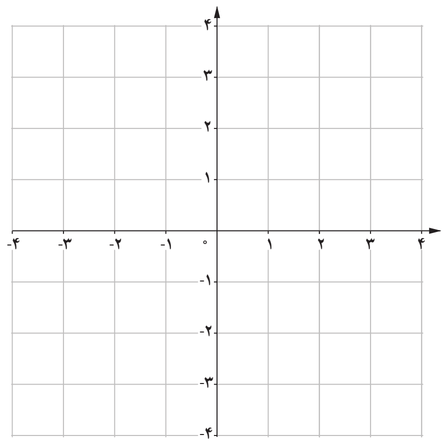


ت) (مرحلهٔ چهارم) با توجه به شکل می‌بینید که دامنهٔ این تابع $[۳,+\infty)$ است.

۳ الف) تابع $f(x)=-۲+\sqrt{x-۱}$ را در نمودار مناسب رسم کنید؛ و سپس دامنهٔ توابع مورد نظر را بیابید.

$g(x)=-۲+\sqrt{x-۱}$

$D_g=$



گاهی در طبیعت و یا صنعت، ضابطهٔ یک تابع رادیکالی ممکن است با ریشهٔ سوم متغیر ظاهر شود. برای مثال دانشمندان ثابت کرده‌اند که فاصلهٔ یک سیاره از خورشید (که آن را با t نشان می دهند)، بر حسب میلیون مایل تقریباً برابر $\sqrt[۳]{۶t^۲}$ است که t بیانگر مدت زمان سال آن سیاره بر حسب تعداد روزهای کرهٔ زمین است. مثلاً یک سال کرهٔ مریخ به اندازهٔ ۶۸۷ روز کرهٔ زمین است. اکنون به کمک ماشین حساب می توان دریافت که فاصلهٔ تقریبی بین خورشید و کرهٔ مریخ تقریباً برابر $\sqrt[۳]{۶\times(۶۸۷)^۲}=۱۴۱/۵$ میلیون کیلومتر است. در رصد نجومی اندازهٔ دقیق فاصلهٔ خورشید تا مریخ حدود ۱۴۲ میلیون مایل محاسبه شده است.

آیا این درست است که سیاراتی که از خورشید دورترند، مدت زمان سال طولانی‌تری دارند؟

تابع جزء صحیح

فعالیت کلاسی

هزینهٔ ارسال پیامک

به حروف و علائمی (مانند الفبا، ارقام، نشانه‌های نگارشی ازجمله علامت سؤال و فاصله و ...، نمادهای خاص مثل نماد هشتگ و ...) که در هنگام نوشتن با یک دستگاه هوشمند (همچون رایانه یا تلفن همراه) به کار می‌رود، نویسه یا کاراکتر می‌گویند. برای مثال عبارت «#ای ـ ایران #ای ـ مرز ـ پرگهر» از ۲۳ نویسه (کاراکتر) تشکیل شده است. در هنگام ارسال یک پیامک، بنا به تعداد نویسه‌های آن، در مبدا به صورت صفحه صفحه در می‌آید و

ارسال می‌شود و در مقصد از کنار هم قرار گرفتن این صفحه‌ها، متن اصلی بازسازی می‌شود. بنا به قوانین سیستم مخابراتی هزینهٔ ارسال یک پیامک از روی تعداد صفحه‌ها محاسبه می‌شود. در جدول زیر تعداد صفحه‌های یک پیامک فارسی مشاهده می‌شود.

تا ۷۰ نویسه	یک صفحه
تا ۱۳۴ نویسه	دو صفحه
تا ۲۰۱ نویسه	سه صفحه
از این به بعد تعرفهٔ صفحهٔ سوم ادامه خواهد یافت. یعنی برای هر حداکثر ۶۷ نویسه، یک صفحهٔ اضافی در نظر گرفته می‌شود.	
تا ۲۶۸ نویسه	چهار صفحه
تا ۳۳۵ نویسه	پنج صفحه

۱ سطر خالی جدول را پر کنید.

۲ الف) تعداد صفحات ارسال هر پیامک زیر را تعیین کنید.

سلام. مامان من رسیدم خونه. نگران نباش.

امتحان فردا لغو شد. هورااا

سلام. می‌دانم که از دستم دلخور هستی؛ اما من اصلاً منظورم تو نبودی. به نظرم سوء تفاهم شده است.

ب) در صورت امکان، با بازنویسی متن‌های بالا آنها را جوری تغییر دهید که هزینهٔ ارسال پیامکی آنها کمتر شود.

۳ در هر مورد تعداد نویسه‌های یک متن داده شده است. تعداد صفحات آن را مشخص کنید.

تعداد نویسه متن پیامک	۷۵	۱۳۴	۲۴۱	۳۳۶	۴۰۲
تعداد صفحات پیامک					

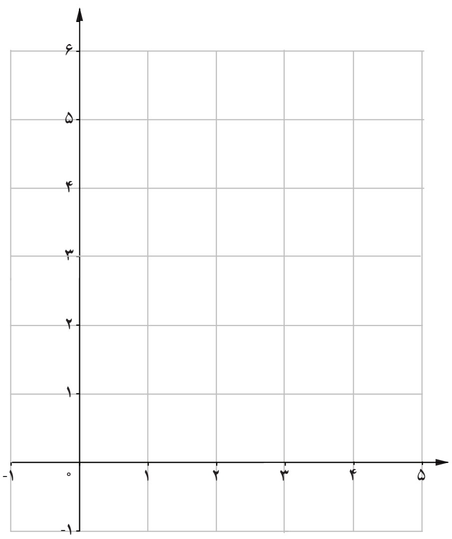
کار در کلاس

هزینهٔ پارکینگ ماشین

در یک پارکینگ، هزینه بر حسب هزار تومان به این صورت محاسبه می‌شود:

زمان		هزینه
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

نمودار تابع قیمت این پارکینگ را رسم کنید به طوری که نشان دهد برای هر ساعت توقف در پارکینگ چه هزینه‌ای باید پرداخت شود.



به توابع شبیه تابع ارسال پیامک یا هزینهٔ پارکینگ، **توابع پله‌ای** می‌گویند.

به تابعی که دامنهٔ آن را بتوان به صورت تعدادی بازهٔ جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در بُرد نسبت داده شود، **تابع پله‌ای** می‌گویند.

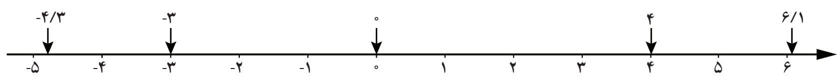
برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است، اما با بالا و پایین رفتن‌های جزئیِ قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهند تا مشتری‌های آن محصول سردرگم نشوند. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک پله‌ای است.

توابع پله‌ای در تجارت و یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، **تابع جزء صحیح** است.

در تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهند و به هر عدد غیر صحیح بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهند. این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

به پنج مثال زیر دقت کنید :

[−۳]=−۳   [−۴/۳]= −۵   [۰]=۰   [۶/۱]=۶   [۴]=۴



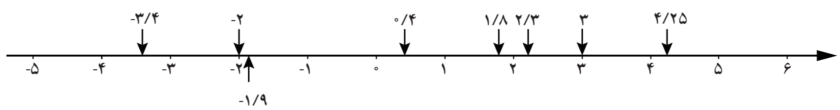
با توجه به مثال‌های داده شده، می‌بینید که می‌توانیم برای محاسبهٔ جزء صحیح یک عدد، آن عدد را روی محور اعداد در نظر بگیریم؛ اگر آن عدد صحیح باشد، جزء صحیح برابر خود آن عدد می‌شود؛ اما اگر آن عدد صحیح نباشد، جزء صحیح برابر نزدیک‌ترین عدد صحیح سمت چپ آن عدد می‌شود.

فعالیت کلاسی

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح‌های خواسته شده را حساب کنید.

[۰/۴] =   [−۱/۹] =   [−۲] =   [−۳/۴] =

[۱/۸] =   [۲/۳] =   [۳] =   [۴/۲۵] =



می‌توانید با مراجعه به وب‌گاه رسمی ادارهٔ پست (http: //parcelprice.post.ir) شهر محل سکونت‌تان (و یا نزدیک‌ترین شهر به محل زندگی‌تان) و همچنین شهری دیگر را انتخاب کنید، و سپس تابع پله‌ای هزینهٔ ارسال یک بسته را برحسب وزن ـ قیمت مشاهده کنید.

۲ جزء صحیح‌های خواسته شده را حساب کنید.

$[-۳۹۸۳/۳۰۸] =$ $\qquad$ $[۴۵۰۷/۹۸] =$

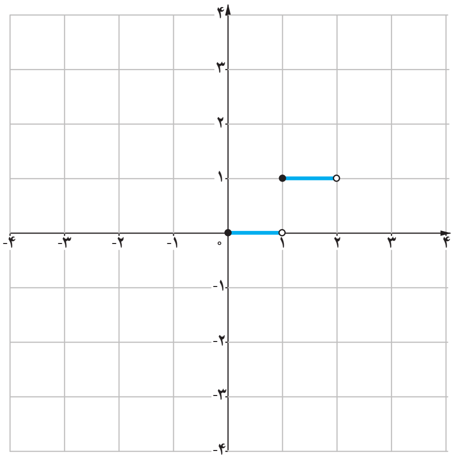
$[-۵۶۹۵۷] =$ $\qquad$ $[۳۱۹] =$

۳ جزء صحیح‌های خواسته شده را حساب کنید.

$\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] =$ $\qquad$ $\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] =$

کار در کلاس

برای رسم نمودار یک تابع پله‌ای باید توجه کنیم که هر بازه‌ای از دامنه به چه عددی نسبت داده می‌شود. در شکل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ رسم شده است. این تابع را در بازهٔ $[-۴,۴)$ رسم کنید.



تمرین‌های درس اول

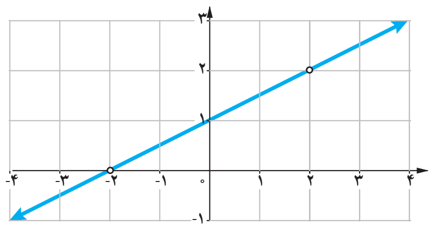
۱ در کار در کلاس صفحهٔ ۷، اگر شبنم بخواهد عملکرد پرتاب‌های آزادش به موفقیت بالای ۹۰ درصد دست یابد، باید چه تعداد پرتاب آزاد موفق پیاپی داشته باشد؟

۲ تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\frac{۱}{x} \qquad D_f=[-۳,۳]$$

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کنید.

۴ ضابطهٔ تابع گویای داده شده را بنویسید.



۵ کدام ضابطه‌های زیر یک تابع گویا را مشخص می‌کند؟

الف) $f(x)=|x|$

ب) $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|}$

۶ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ شود.

۷ در کتاب فیزیک سال دهم خوانده‌اید که برای جسمی به جرم m کیلوگرم که با تندی v کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند، انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ به دست می‌آید. نشان دهید که با داشتن مقدار انرژی جنبشی یک جسم ۴۰ گرمی، می‌توان برای محاسبهٔ مقدار تندی آن، بر حسب کیلومتر بر ساعت از رابطهٔ $v=۵\sqrt{۲K}$ استفاده کرد.

۸ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳+\sqrt{۱۳-x}$ را تعیین کنید.

۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-\frac{۱}{۲}+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

۱۰ الف) متن زیر بیش از ۴۰۰ نویسه دارد. می‌خواهیم این متن را برای بیش از ۲۰۰ نفر از بستگان، وابستگان و دوستان‌مان بفرستیم و اُپراتور تلفن همراهی که انتخاب کرده‌ایم، هزینهٔ ارسال هر صفحهٔ پیامک را ۱۰۰ ریال حساب می‌کند، چقدر هزینه باید پرداخت کنیم؟

> با سلام.
> نوبهار است بر آن کوش که خوشدل باشی؛   که بسی گل بدمد باز و تو در گل باشی
> نوروز بالاخره آمد! در این نوبهار آرزوی شادکامی برایتان دارم. ؛)
> در این تعطیلات پیشرو به یک ایرانگردی کوتاه می‌روم و قصد دارم به یک روستای بین راهی که تازه تبلیغاتش را دیده‌ام، سری بزنم. فکر می‌کنم سفری جالب و متفاوتی بشود. به خصوص اینکه سال‌ها از مسیر تردد کنار این روستا رد می‌شدم و از آن خبری نداشتم.
> با #من_در_سفرم. بهم_خوش_بگذره! من رو دنبال کنید.

ب) متنی ارزان‌تر بنویسید که فقط حاوی مطالب مهم پیامک بالا باشد.

۱۱ جزء صحیح‌های خواسته شده را حساب کنید.

[۳۰۰/۴۰۰۲]   [−۲۳۰۹/۵۴]   [−۱۰۳/۰۰۳]

۴ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$[۱/۰۱\times ۲/۰۲]+[۱/۱۱\times ۲/۱۲]+[۱/۲۱\times ۲/۲۲]+[۱/۳۱\times ۲/۳۲]$$

۵ تابع $f(x)=[x]+۲$ را رسم کنید.

درس دوم

آشنایی با برخی از ویژگی‌های توابع

وارون یک تابع

کار در کلاس

تغییر واحد اندازه‌گیری

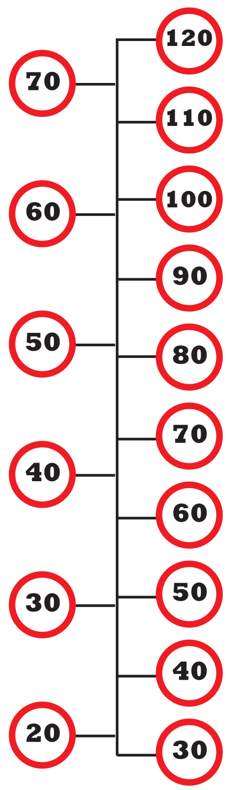
در کتاب فیزیک خوانده‌اید که در کشور ما ایران دستگاه‌های اندازه‌گیری بر اساس دستگاه بین‌المللی (SI) است. برای مثال دراین دستگاه اندازه‌گیری، اندازهٔ تندی ماشین‌ها بر اساس کیلومتر بر ساعت اندازه‌گیری می‌شود. با این همه در بعضی کشورهای انگلیسی‌زبان (مثل انگلیس و آمریکا) سرعت ماشین‌ها بر خلاف معمول، بر اساس مایل بر ساعت اندازه‌گیری می‌شود. هر مایل تقریباً ۱۶۰۰ متر است.

در واقع هر مایلی که در این کشورها استفاده می شود ۱٫۶۰۹٫۳۴۴ متر است.

۱ تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل بر ساعت» به «کیلومتر بر ساعت» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر بر ساعت» به «مایل بر ساعت» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$



۲ الف) تابلوی راهنمایی ــ رانندگی محدودیت سرعت ۳۰ مایل بر ساعت یعنی محدودیت سرعت چند کیلومتر برساعت؟

ب) شکل داده شده در حاشیهٔ کتاب، بیانگر مقایسهٔ تابلوهای راهنمایی ــ رانندگی محدودیت سرعت کیلومتر بر ساعت و مایل بر ساعت است. مشخص کنید واحد اندازه‌گیری تصویر هر تابلو چیست.

هر تابعی با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می کند که متغیر x چه ارتباطی با متغیر y دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن x به y رسید؛ اما گاهی برایمان اهمیت دارد که بدانیم چگونه می‌توان از y به x رسید. تبدیل واحدهای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این دست است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جایی مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان، زوج مرتب (b,a) را ساخت.
به همین ترتیب، اگر همهٔ مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع F را جابه‌جا کنیم، به رابطهٔ جدید به دست آمده، **وارون** آن تابع می‌گویند و آن را با F^{-1} نشان می‌دهند.

برای مثال وارون تابع $F=\{(۶,۴)\ ,\ (۵,۳)\ ,\ (۲,۱)\}$ برابر با $F^{-1}=\{(۴,۶)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۱,۲)\}$ است.

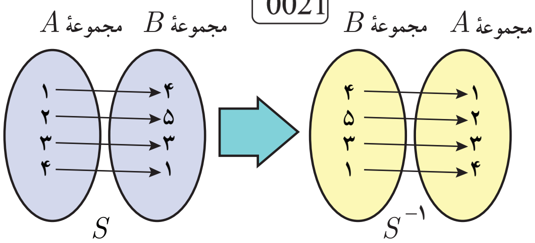
برای مثال، می‌توان به فرمول‌های رشد جمعیت اشاره کرد. سال‌هاست که جمعیت‌شناسان، آماردانان، ریاضیدانان، جامعه‌شناس‌ها و گروهی از نخبه‌ترین دانشمندان با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند که به تابع تخمین جمعیت دست یابند. این تابع باید مشخص کند مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود.
با این همه، در عمل معمولاً برعکس آن نیز اهمیت دارد. یعنی معمولاً برای برنامه‌ریزی‌های کلان دولت‌ها و حکومت‌ها، برعکس این تابع بسیار مهم است. مثلاً این تابع باید مشخص کند که در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید.

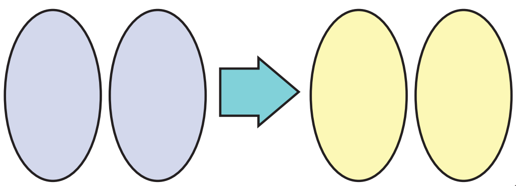
کار در کلاس

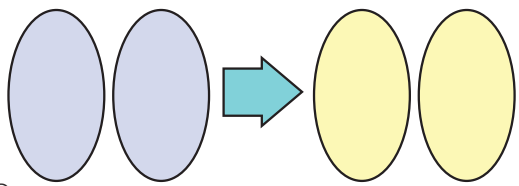
۱ الف) وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$S=\{(۴,۱)\ ,(۱,۴)\ ,(۳,۳)\ ,(۲,۵)\}$	$S^{-1}=$
$T=\{(۵,۱)\ ,(۱,۴)\ ,(۴,۳)\ ,(۲,۳)\}$	$T^{-1}=$
$U=\{(۲,۳)\ ,(۵,۲)\ ,(۴,۱)\ ,(۳,۴)\}$	$U^{-1}=$

ب) به نمونهٔ حل شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده در قسمت «الف» را به دست آورید.





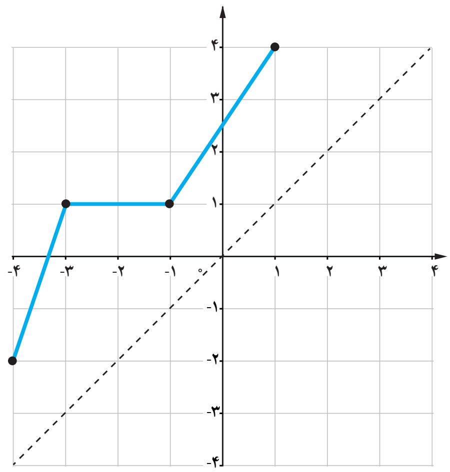


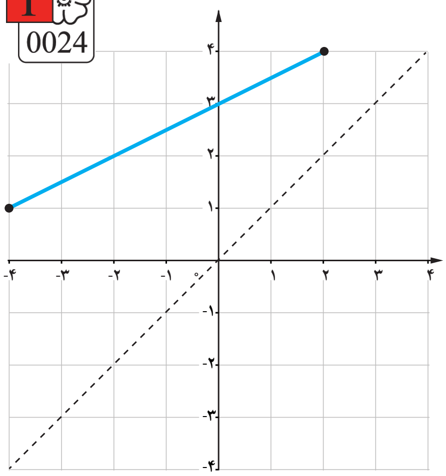
پ) درستی یا نادرستی عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

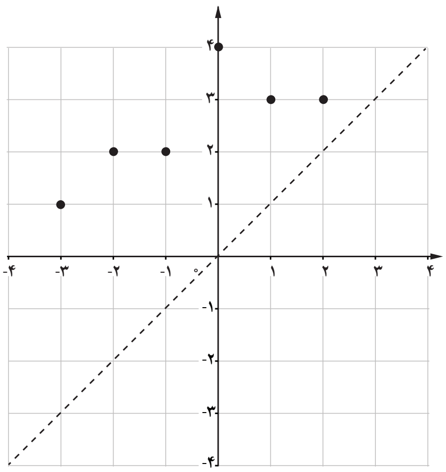
S^{-1} یک تابع است.	بله□	خیر□
T^{-1} یک تابع است.	بله□	خیر□
U^{-1} یک تابع است.	بله□	خیر□

ت) از پاسخ قسمت «ب» و «پ» چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
وارون تابع F، خود یک تابع است، اگر که در زوج‌های مرتب رابطهٔ F ....

۲ الف) در هر یک از شکل‌های زیر، نمودار تابعی رسم شده است. در این شکل‌ها وارون آن تابع را رسم کنید.





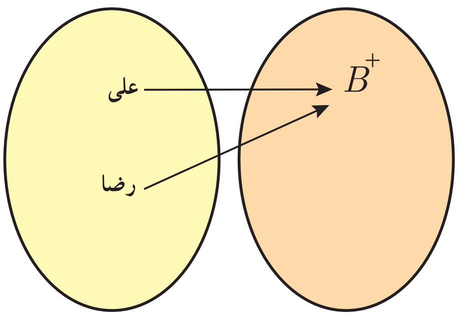


ب) دربارهٔ ارتباط بین نمودار یک تابع و وارون آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
نمودار یک تابع و نمودار وارون آن تابع نسبت به .... قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، برای رسم وارون آن تابع کافی است که قرینهٔ آن را نسبت به .... رسم کنیم.

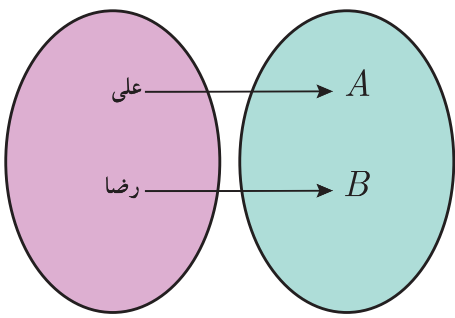
قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجسته ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که هیچ دو نفری اثر انگشت کاملاً یکسان ندارند». در آن زمان در ایران قدیم نیز از اثر انگشت‌شصت برای مهر نمودن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم در تمدن غرب به‌کارگیری از تکنیک‌های تشخیص اثر انگشت برای تحقیقات جنایی با الهام از تمدن شرق مرسوم شد. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

تابع یک به یک

گاهی به جای اعضای یک مجموعه راحت‌تر هستیم که از یک ویژگی آن اعضا استفاده کنیم. برای مثال می‌توانیم به هر شخص یک گروه خونی نسبت دهیم. با این کار افراد بسیاری خواهند بود که گروه خونی یکسانی خواهند داشت.



گاهی به جای اعضای یک مجموعه راحت‌تر هستیم که ویژگی‌های آن اعضا را به‌طور یکتا مشخص کنیم. در این حالت باید ویژگی یک عضو دقیقاً مشخص کند که در مورد چه عضوی سخن می‌گوییم. برای مثال وقتی به هر شخص یک اثر انگشت نسبت دهیم، به‌طور یکتا مشخص می‌کنیم که هر اثر انگشت مربوط به چه شخصی است. همین ویژگی است که می‌تواند در جُرم‌یابی جهت تشخیص هویت، مورد استفادهٔ کارآگاه پلیس قرار گیرد. در واقع در این حالت، هر عضو بُرد تنها از یک عضو دامنه به دست می‌آید.



اگر در تابع f هر دو عضو متمایز در دامنهٔ تابع به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند، به تابع f، یک **تابع یک به یک** می‌گویند.

فعالیت کلاسی

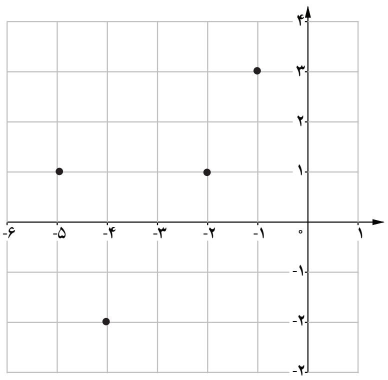
۱ به نمودارهای پیکانی صفحهٔ ۱۷دقت کنید. چگونه با توجه به نمودار پیکانی می‌توان فهمید که یک تابع، یک به یک است؟

۲ الف) به زوج‌های مرتب توابع صفحهٔ ۱۷، دقت کنید. چگونه با توجه به زوج‌های مرتب می‌توان فهمید که یک تابع، یک به یک است؟

در هر تابع یک به یک هر عضو برد، تنها یک بار در مولفهٔ .... ظاهر می‌شود.

ب) بدون محاسبهٔ وارون تابعِ $\{(-1,2), (2,2), (-1,4), (1,2)\}$، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

پ) چرا تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2 - 7x$ یک به یک نیست؟



۳ الف) در شکل داده شده، در صورت امکان، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

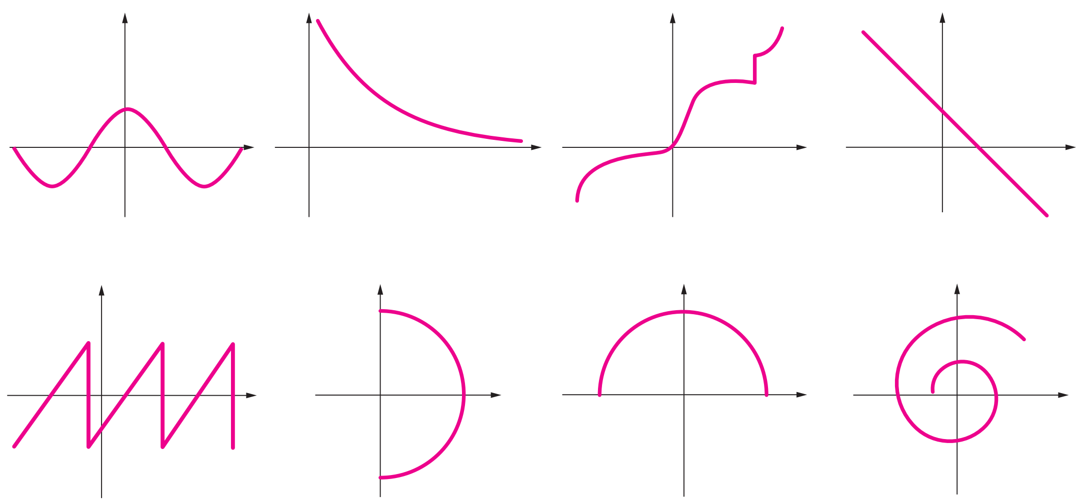
ب) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک به یک است؟

پ) آیا وارون نمودار تابعی که رسم کرده‌اید، تابع است؟ چرا؟

ت) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟

اگر هر خطِ موازی محور........... نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

۴ کدام نمودارهای داده شده، یک تابع یک به یک را مشخص می‌کنند؟



0035

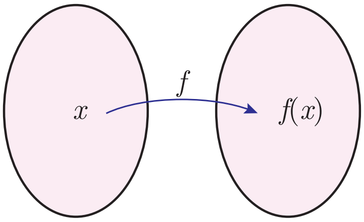
به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک به یک

می‌خواهیم وارون تابع یک به یک با ضابطهٔ $f(x)=۲x+\frac{۱}{۳}$ را به دست آوریم.

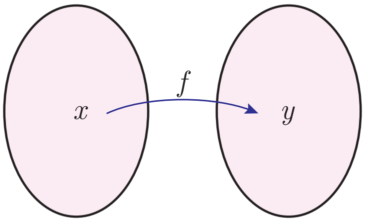
مرحلهٔ اول) از نماد y به جای $f(x)$ استفاده می‌کنیم.

$$y=۲x+\frac{۱}{۳}$$

0031



0032

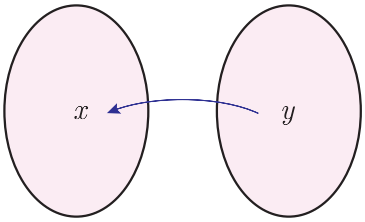


مرحلهٔ دوم) در صورت امکان، y را بر حسب x حساب می‌کنیم.

$$y=۲x+\frac{۱}{۳}\to y=\frac{۶x+۱}{۳}\to ۳y=۶x+۱\to$$

$$۶x+۱=۳y\to ۶x=۳y-۱\to x=\frac{۳y-۱}{۶}$$

0033

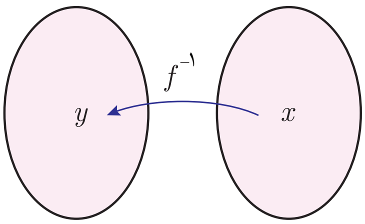


توجه کنید که به دست آوردن تابع وارون یک تابع یک به یک همیشه به راحتی امکان‌پذیر نیست، زیرا همیشه نمی‌توان y را به‌راحتی برحسب x حساب کنیم.

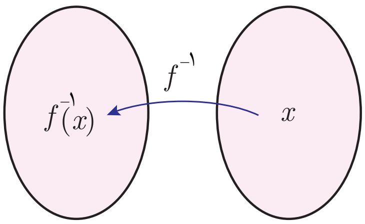
مرحلهٔ سوم) به جای y از نماد x و به جای نماد x از نماد $f^{-۱}(x)$ استفاده می‌کنیم.

$$f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۱}{۶}$$

0034



0035



0036

کار در کلاس

در هر مورد ضابطهٔ توابعی یک به یک داده شده‌اند. وارون هر یک از آن دو را حساب کنید.

$g(x)=۴x$ $\qquad$ $f(x)=x+۵$ $\qquad$ $v(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$ $\qquad$ $u(x)=۲x+۳$

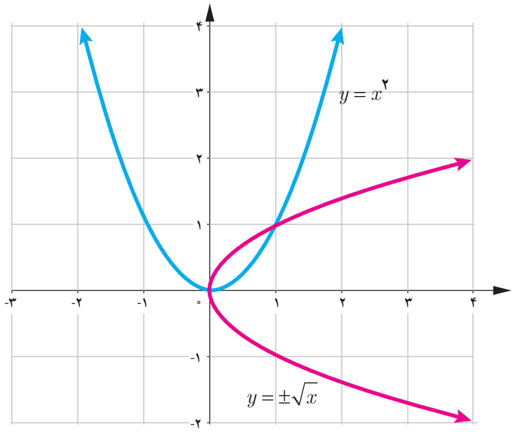
0037

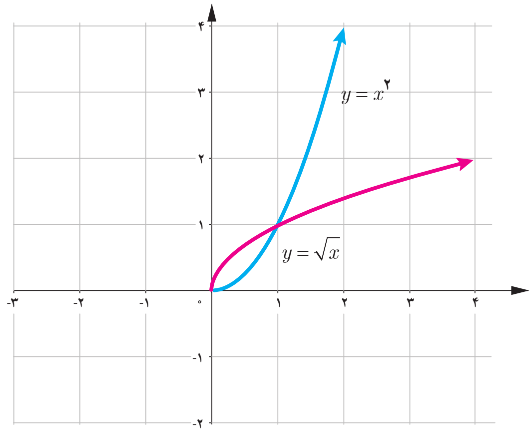
محدود کردن دامنه و ساختن یک تابع یک به یک

در شکل زیر وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ که با رنگ قرمز رسم شده است، نشان می‌دهد که تابع نیست.

ضابطهٔ وارون این تابع به صورت $f^{-۱}(x)=\pm\sqrt{x}$ است که تابع نیست.

با محدود کردن دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ به همهٔ اعداد نامنفی، می‌توان به تابع جدیدی دست یافت که یک به یک است.



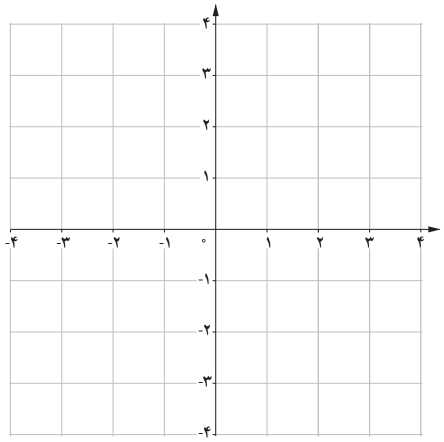


اکنون اگر وارون تابع g را حساب کنیم می‌بینیم که $g^{-۱}(x)=\sqrt{x}$ یک تابع است.

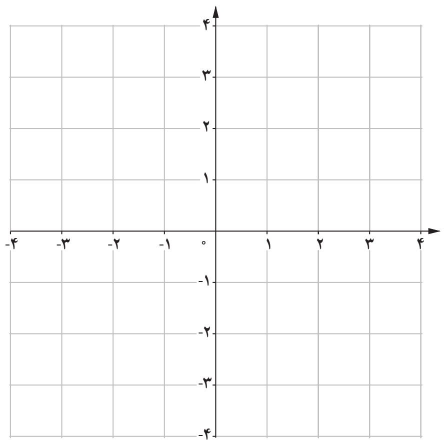
همچنان که می‌بینید با **محدود کردن** دامنهٔ یک تابعی که یک به یک نیست می‌توان یک تابع یک‌به‌یک جدید ساخت که آن تابع وارون داشته باشد.

کار در کلاس

۱ الف) با رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ نشان دهید که این تابع یک به یک نیست.



ب) با محدود کردن دامنهٔ این تابع به $[۳,+\infty)$، تابع جدیدِ g را رسم کنید و نشان دهید که این تابع یک به یک است.



پ) نمودار $g^{-۱}$ را رسم کنید.

ت) با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک به یک ساخت؟

☐ $[۰,+\infty)$

☐ $(۰/۵,+\infty)$

☐ $[-۳,۲]$

☐ $(۷,۸)$

☐ $(-\infty,-۵)$

تمرین‌های درس دوم

0040

۱ یکی از تابع‌های رادیکالی کاربردی، تابع خط ترمز است. در شرایط خاص، یک پلیس کارشناس تصادف با کمک تابع $s=\frac{۱۰\sqrt{l}}{\sqrt{۵}}$ می‌تواند مقدار تندی یک ماشین را حساب کند که در این تابع l بیانگر طول خط ترمز برحسب فوت و s بیانگر تندی ماشین برحسب مایل بر ساعت است.

الف) این فرمول را بدون رادیکال مخرج بازنویسی کنید.

ب) این فرمول را جوری بازنویسی کنید که یک پلیس ایرانی بتواند از آن استفاده کند.

0039

فوت یکی از واحدهای اندازه‌گیری طول در دستگاهی غیر از SI است. یک فوت تقریباً به اندازهٔ طول پای یک انسان بالغ است، بنابراین یک پلیس راهور می‌تواند با اندازه‌گیری به کمک طول پای خود، به اندازهٔ تقریبی طول خط ترمز بر حسب فوت دست یابد.

۲ به متن پزشکی زیر دقت کنید.

هیپوتالاموس در مغز یک انسان تعیین می‌کند که درجهٔ حرارت بدن چه مقدار باید باشد. این مقدار حدوداً ۹۸/۶ درجه است. با این حال گاهی اوقات هیپوتالاموس در مقابله با یک عفونت و یا بیماری، درجهٔ حرارت را بالاتر می‌برد. دانشمندان بر این باورند که بالابردن دمای بدن راهبردی برای کشتن میکروب‌های موجب بیماری و عفونت است.

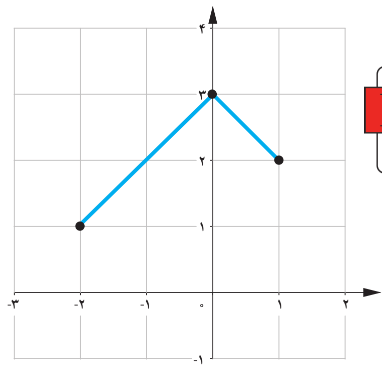
با توجه به نقطه جوش آب که حدوداً ۱۰۰ درجه است، به نظر می‌آید اگر خطای کوچکی در عملکرد هیپوتالاموس رخ دهد، خون در رگ‌های یک انسان به جوش خواهد آمد! البته شاید املاح موجود در خون انسان باعث بالا رفتن نقطهٔ جوش شوند.

نظر شما چیست؟

۳ وارون تابع هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $\{(۲,۳), (-۲,۱), (-۱,۲)\}$

ب)



0038

۴ وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۵x-۲$

ب) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$

ج) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$

۵ وارون تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را حساب کنید.

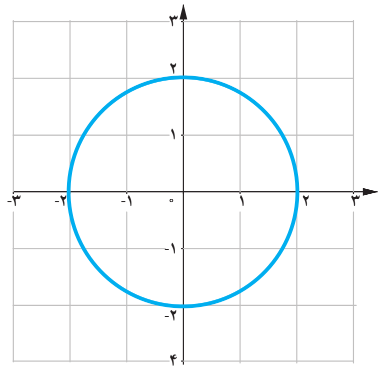
۶ نشان دهید که دو تابع گویای زیر وارون یکدیگرند؟

$$f(x)=\frac{۱}{x-۲} \qquad\qquad g(x)=\frac{۱}{x}+۲$$

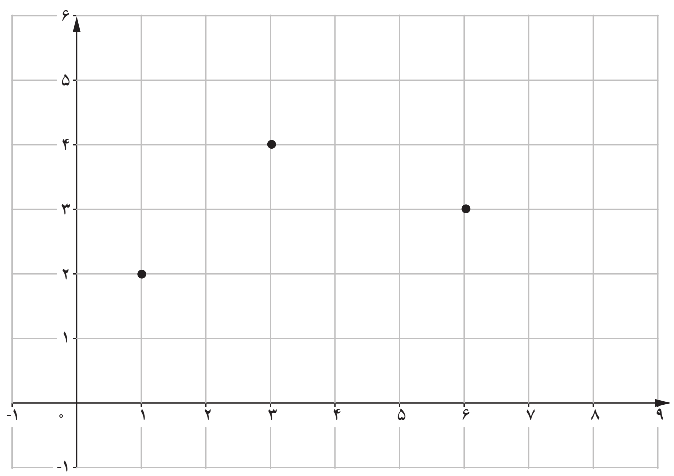
۷ نشان دهید که وارون هر دو تابع داده شده، یک تابع درجهٔ دوم است.

الف) $f(x)=۳-\sqrt{x}$ ب) $g(x)=۲\sqrt{x}-۱$

۸ در شکل زیر نمودار یک دایره داده شده است. تابعی یک به یک معرفی کنید که دامنهٔ آن $[-۲,۲]$ و نمودارش بخشی از این دایره باشد.



۹ آیا تابعی یک به یک با دامنهٔ $[۱,۶]$ وجود دارد که نمودارش از سه نقطهٔ داده شده بگذرد؟



۱۰ الف) چرا نمودار هر تابع به شکل خط راست، یک به یک است؟

ب) چرا نمودار هر تابع به شکل سهمی یک به یک نیست؟

پ) آیا امکان دارد که یک تابع پله‌ای یک به یک شود؟

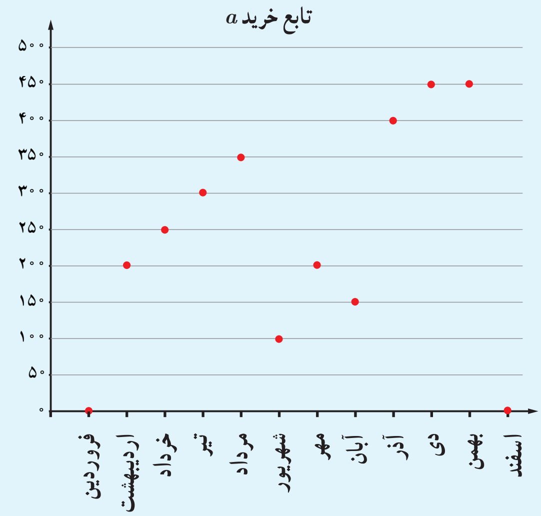
ت) آیا امکان دارد که یک تابع چندضابطه‌ای یک به یک شود؟

درس سوم

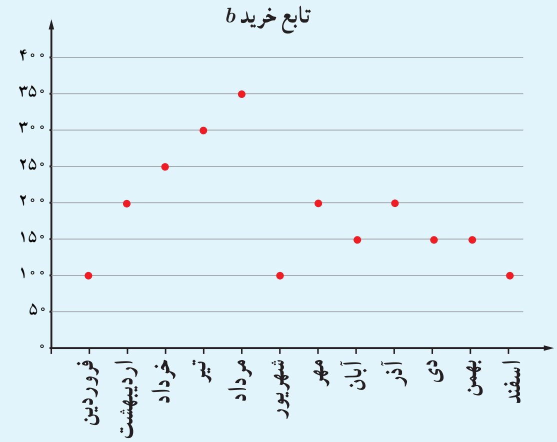
اعمال روی توابع

هنرمندی را در نظر بگیرید که در یک کارگاه خانگی محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزارو یراق خریداری می‌کند؛ و پس از تولید محصولات زیبا آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید و فروش او را نشان می‌دهد.

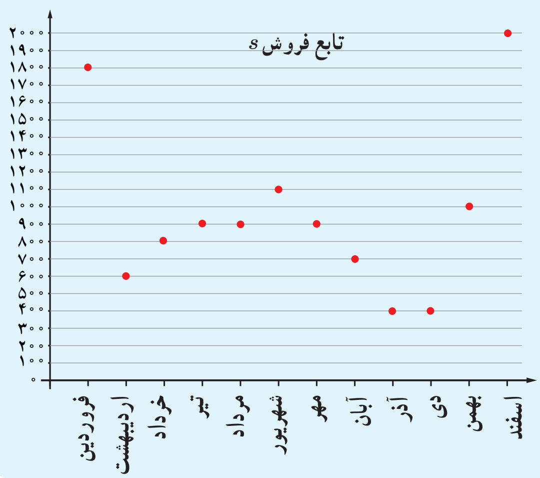
نمودار تابع a نشان می‌دهد که در هر ماه چند هزار تومان چرم خریداری شده است. برای مثال بنا به شکل، $a(\text{اردیبهشت})=۳۰۰$. پس این هنرمند در سومین ماه سال یعنی در تیرماه ۳۰۰ هزار تومان خرید کرده است.



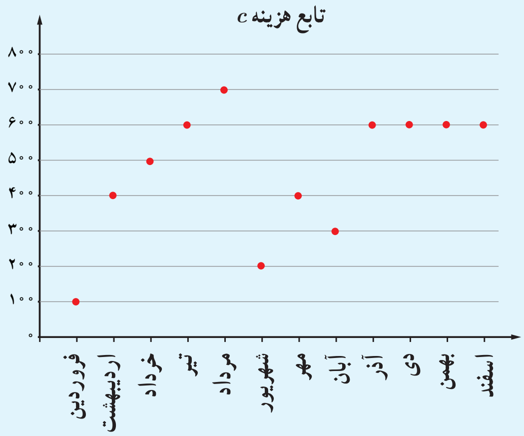
نمودار تابع b نشان می‌دهد که در هر ماه چند هزار تومان ابزار و یراق خریداری شده است.



نمودارتابع s نشان می‌دهد که در هر ماه چند هزار تومان از محصولات به فروش رسیده است.



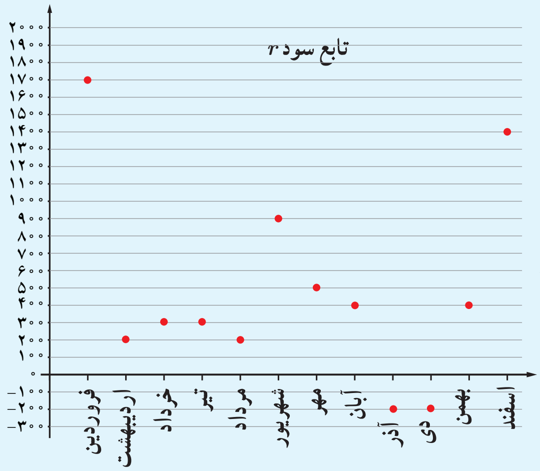
۱ــ به زبان ساده، «هزینه» یعنی جمع کل مقدارهای خریداری شده. در شکل زیر بخشی از نمودار تابع هزینهٔ این هنرمند رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.



الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنهٔ تابع c، $c(x)=a(x)+b(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به دست آوردن مقادیر تابع، مقادیر دو تابع a و b را با هم جمع می‌کنیم.



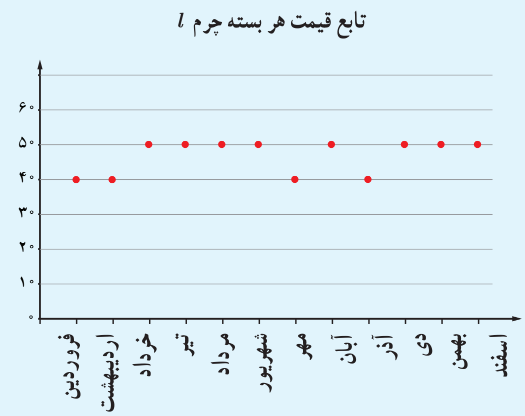
۲ــ به زبان ساده، «سود» یعنی حاصل تفریق مقدار فروش از مقدار هزینه. در شکل زیر بخشی از نمودار تابع سود این هنرمند رسم شده است. این تابع را با r نشان می‌دهیم.

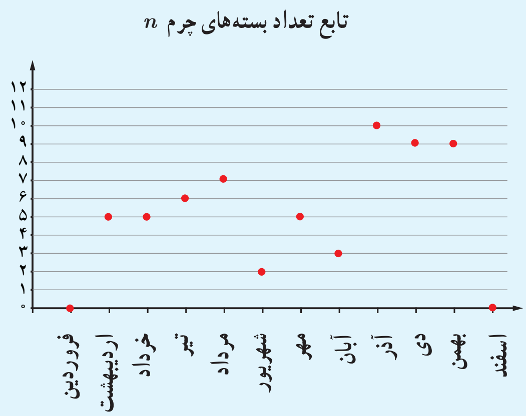
الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع r را برای ماه‌های فصل بهار بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنهٔ تابع r، $r(x)=s(x)-c(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به دست آوردن مقادیر تابع r، مقادیر دو تابع s و c را از هم کم می‌کنیم.

۳ــ در نمودارهای زیر مشخص شده است که این هنرمند در هر ماه چقدر چرم و به چه قیمتی خریداری کرده است. قیمت هر بستهٔ چرمی که او را در ماه x اُم سفارش داده است را با $l(x)$ هزارتومان نشان می‌دهیم. همچنین تعداد بستهٔ چرمی که او در ماه x اُم سفارش داده است را با $n(x)$ نشان می‌دهیم.





چرا برای هر x در دامنهٔ تابع a، $a(x)=l(x).n(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به دست آوردن مقادیر تابع a، مقادیر دو تابع l و n را در هم ضرب می‌کنیم.

p 0043 گاهی نیاز است که روی توابع عملیات جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم انجام دهیم. به جدول زیر دقت کنید.

نام عمل (اگر دو تابع f و g باشند.)	نماد	تعریف	دامنه
جمع	$(f+g)(x)$	$f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)$	$f(x)-g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب	$(f.g)(x)$	$f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

p 0044 برای مثال اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x-2$ آنگاه :

الف) ضابطهٔ جمع f و g برابر است با :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-1)+(x-2)=3x-3$$

و دامنهٔ آن برابر است با :

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

ب) ضابطهٔ تفریق g از f برابر است با :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-1)-(x-2)=x+1$$

و دامنهٔ آن برابر است با :

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

پ) ضابطهٔ ضرب f و g برابر است با :

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(2x-1).(x-2)=2x(x-2)-1(x-2)$$
$$=(2x^2-2x)+(-x+2)=2x^2-3x+2$$

و دامنهٔ آن برابر است با :

$$D_{f.g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

د) ضابطهٔ تقسیم f بر g برابر است با :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$$

و دامنهٔ آن برابر است با :

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{x \mid x-2=0\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

0045

کار در کلاس

۱ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+3x+1$ و $g(x)=x-3$ را محاسبه کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=$	
$f-g$	$(f-g)(x)=$	
$f.g$	$(f.g)(x)=$	
—	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	

۲ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع با ضابطهٔ $u(x)=\sqrt{x}+1$ و $v(x)=x-1$ را محاسبه کنید.

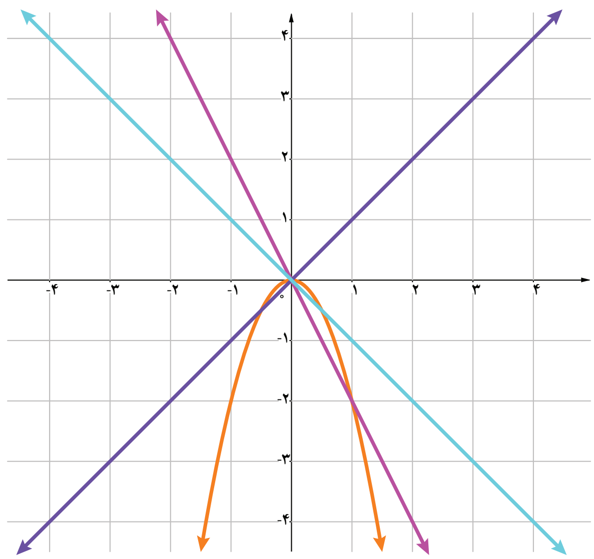
تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=$	
$u-v$	$(u-v)(x)=$	
$u.v$	$(u.v)(x)=$	
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=$	

۳ در شکل زیر نمودار هر چهار تابع رسم شده است.

الف) کدام‌یک از جمع دو تابع دیگر به‌دست آمده است؟

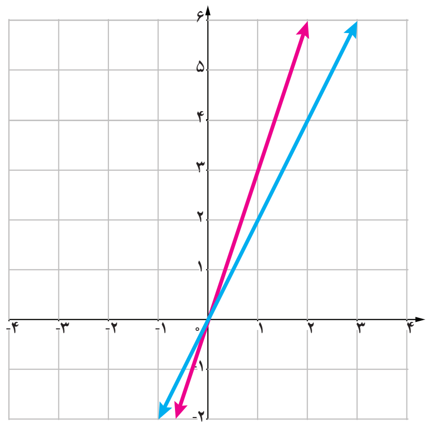
ب) کدام‌یک از ضرب دو تابع دیگر به‌دست آمده است؟

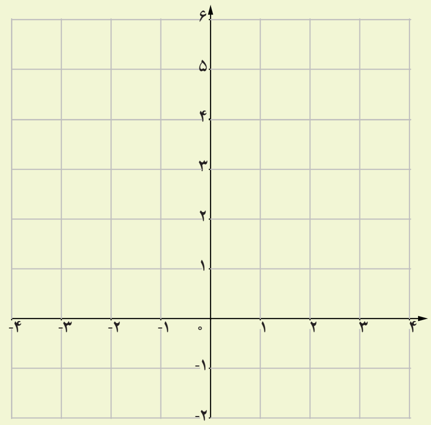
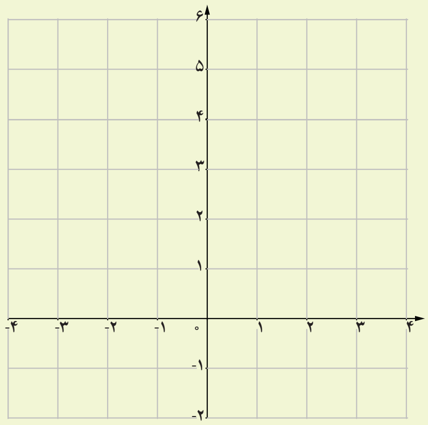
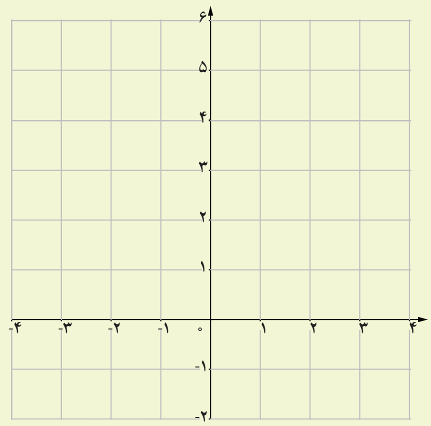
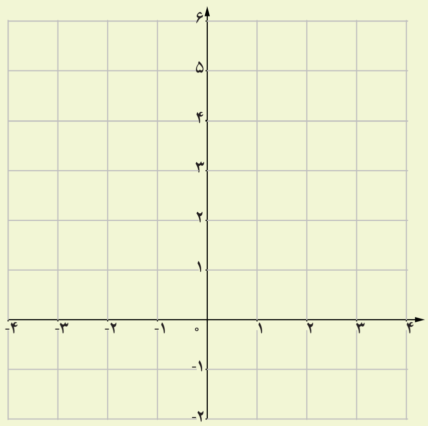
0048



۴ مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی داده شده‌اند.

الف) در هر مورد نمودار خواسته شده را رسم کنید.



$f+g$	$f-g$
	
$f.g$	$\frac{f}{g}$
	

حاصل ضرب تابع با ضابطهٔ $f(x)$ در تابعی که برای هر نقطه، مقدارش عدد ثابت k است را با $kf(x)$ نشان می‌دهند.

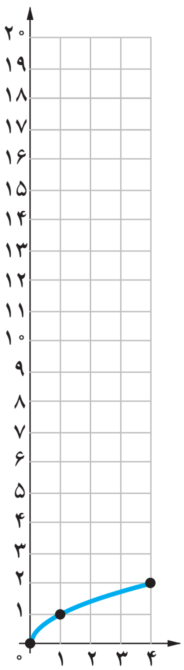
0046

فعالیت کلاسی

۱ الف) چرا مقدار $f(x)+f(x)$ و $2f(x)$ با هم برابر است؟

ب) فرض کنید که n عدد طبیعی است. چند بار $f(x)$ را با خودش جمع کنیم تا حاصلش با تابع با ضابطهٔ $nf(x)$ برابر شود؟

۲ الف) به نمودار تابع f دقت کنید. این نمودار طول قد یک گیاه را در ماه‌های متفاوت برحسب دسی‌متر نشان می‌دهد. (هر دسی‌متر ۱۰ سانتی‌متر است.) اگر بخواهیم طول این گیاه را بر حسب سانتی‌متر بیان کنیم، نمودار تابع g به دست آمده به چه صورتی در خواهد آمد؟



0050

ب) کدام‌یک از رابطه‌های زیر، رابطهٔ بین دو تابع f و g را نشان می‌دهد؟

$g(x)=f(x)$ $\qquad$ $g(x)=\frac{1}{10}f(x)$

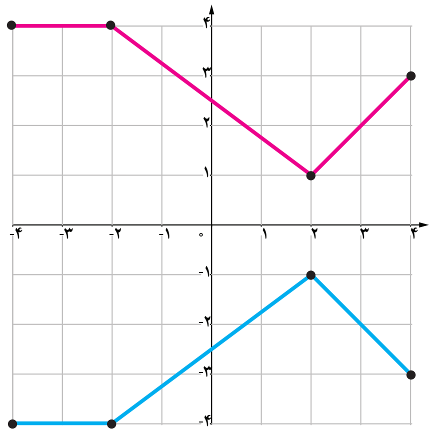
$g(x)=10f(x)$ $\qquad$ $g(x)=f(10x)$

اگر k عدد مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ را k برابر کنیم.

0047

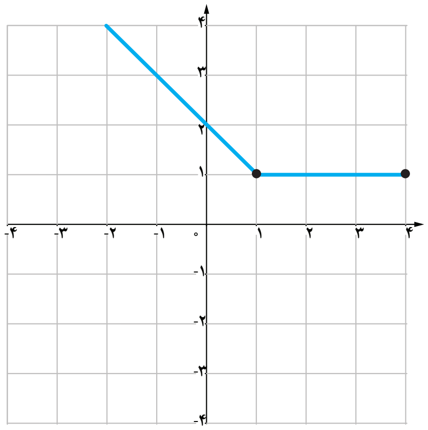
فعالیت کلاسی

۱ الف) در شکل زیر نمودار دو تابع f و g داده شده است. این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟



0051

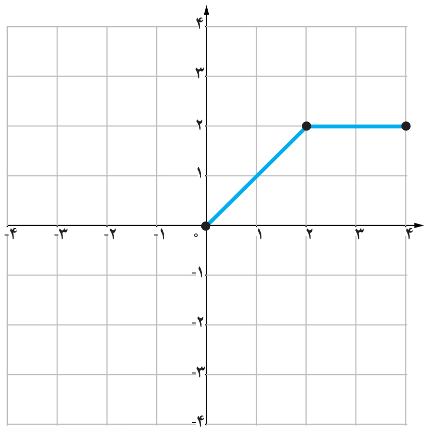
ب) با توجه به نمودار تابع f داده شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $-f(x)$ را رسم کنید.



پ) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $-f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار را نسبت به .... رسم کنیم.

۲ در شکل داده شده نمودار تابع f داده شده است. نمودار $-۲f(x)$ را رسم کنید.



الف) $-۲f(x)$

۳ عبارت زیر را کامل کنید.

اگر k عدد منفی باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $kf(x)$ کافی است که ابتدا نمودار .... را رسم کنیم و سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به .... رسم کنیم.

تمرین‌های درس سوم

۱ با کمک گرفتن از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ — ، هر یک از نمودارهای داده شده را رسم کنید.

الف) $a(x)=-\frac{۱}{x}$ ب) $b(x)=\frac{۱}{۳-x}$

۲ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع با ضابطهٔ $u(x)=|x|$ و $u(x)=\frac{۱}{x}$ را محاسبه کنید.

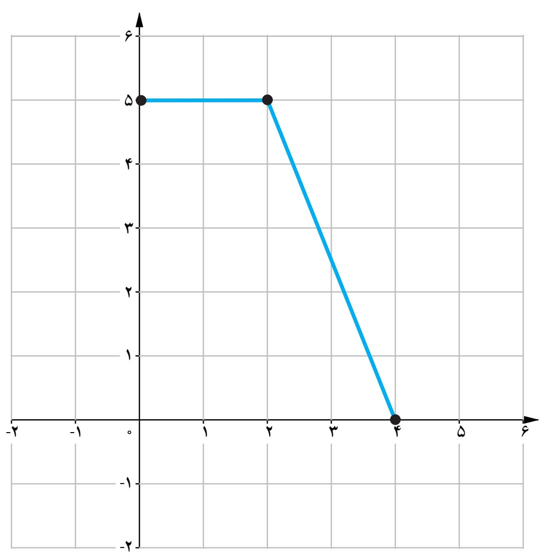
تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=$	
$f-g$	$(f-g)(x)=$	
$f.g$	$(f.g)(x)=$	
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	

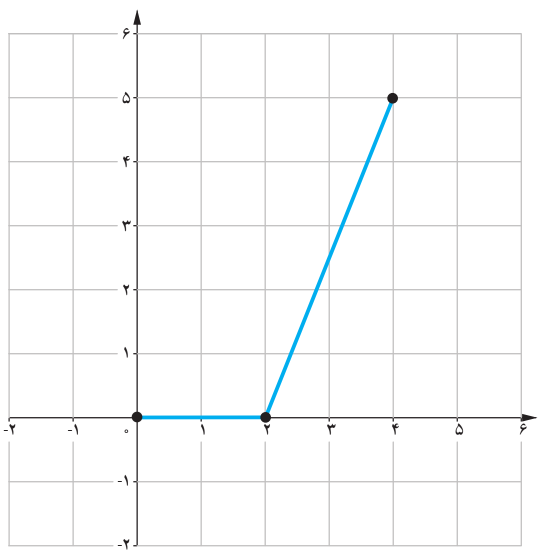
۳ در هر یک از موارد داده شده جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=۵x-۲$ $f(x)=۲x+۳$ ب) $g(x)=x+۲$ $f(x)=x^۲-۴$

ث) $g(x)=-\sqrt{x}$ $g(x)=\sqrt{x}$ ج) $g(x)=x^۲+۳x-۱۰$ $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$

۴ مطابق شکل، دو تابع f و g داده شده‌اند. حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را به‌دست آورید.

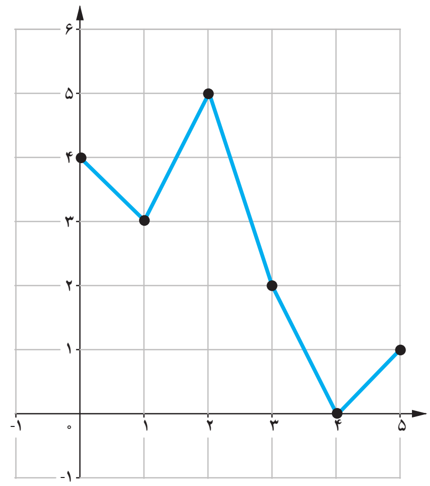




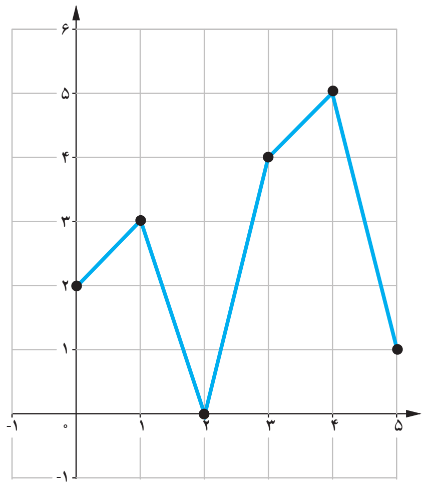
0049

۵ اجاقی داریم که در آن دو منبع گرمایی قابل تنظیم وجود دارد که می‌توانند همزمان و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت شکل‌های زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد، مطابق شکل‌های زیر باشد، بیشترین دمایی که این اجاق خواهد داشت چه مقدار است؟

0057



0056



۶ تابع با ضابطهٔ داده شده $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

۷ الف) درستی و یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید.

$۵f(x)=۳f(x)+۲f(x)$

$۲f(x)=۶f(x)-۴f(x)$

$۸f(x)=۴f(x).۲f(x)$

$۳f(x)=\dfrac{۶f(x)}{۲f(x)}$ $\quad (f(x)\neq ۰)$

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۸ با کمک گرفتن از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، هر یک از نمودارهای داده شده را رسم کنید.

الف) $e(x)=۲\sqrt{x}$ پ) $b(x)=-\sqrt{x-۲}$

ب) $f(x)=-۳\sqrt{x}$ ت) $d(x)=۱-\sqrt{x}$

فصل ۴

مثلثات

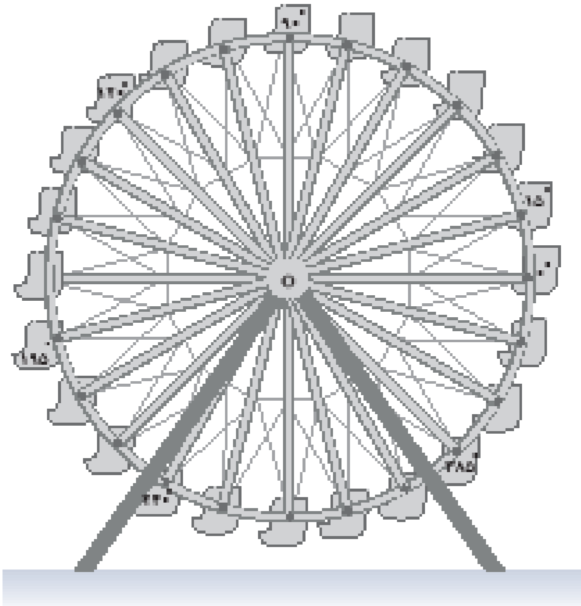
درس اوّل
واحدهای اندازه‌گیری زاویه

درس دوم
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس سوم
توابع مثلثاتی

درس اوّل

واحدهای اندازه‌گیری زاویه



شکل ۱

یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه که تاکنون با آن آشنا شدیم «درجه» است. یک درجه که آن را به صورت 1° نمایش می‌دهیم برابر با .... محیط یک دایره است. دایره مثلثاتی، دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع .... و جهت مثبت نمایش زاویه‌ها در آن بر خلاف گردش عقربه‌های ساعت است و به آن جهت .... می‌گویند. در شکل ۱ یک دایره مثلثاتی را به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در این حالت اندازهٔ زاویهٔ مرکزی بین هر دو شعاع متوالی .... درجه است. زاویهٔ مناسب را برحسب درجه در جاهای خالی مشخص کنید.

می‌دانیم در دایره، طول هر کمان با زاویه مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است. حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان طول کمان روبه‌روی هر زاویه مرکزی را برحسب یک واحد طولی چون سانتی‌متر، متر یا کیلومتر بیان نمود؟

فعالیت کلاسی ۱

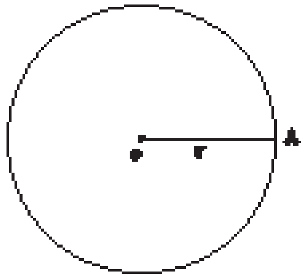
در این فعالیت می‌خواهیم فاصله تقریبی بین دو شهر را روی کره زمین به دست آوریم. می‌دانیم هر شهر دارای مختصاتی به نام طول و عرض جغرافیایی است. طول جغرافیایی نسبت به نصف‌النهار مبدأ و عرض جغرافیایی نسبت به خط استوا به دست می‌آیند. منظور از عرض جغرافیایی یک نقطه روی کره زمین یعنی اندازهٔ زاویهٔ حاده بین نیم خطی که از مرکز زمین به خط استوا وصل می‌شود و نیم خطی که از مرکز زمین به آن نقطه وصل می‌شود. همچنین طول جغرافیایی یک نقطه روی کره زمین یعنی اندازه زاویه حاده بین نیم خطی که از مرکز زمین به نصف‌النهار مبدأ وصل می‌شود و نیم خطی که از مرکز زمین به آن نقطه وصل می‌شود. عرض جغرافیایی نقاط واقع بر خط استوا .... و عرض جغرافیایی قطب شمال .... است. به عنوان مثال دو شهر لاهیجان در استان گیلان و خمین در استان مرکزی را در نظر می‌گیریم که دارای طول جغرافیایی یکسان (تقریباً 50°) و به ترتیب دارای عرض جغرافیایی تقریبی 37° و 33° هستند. اگر دو نقطه A و B در شکل ۲ متناظر با این دو شهر باشند و شعاع کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیریم می‌خواهیم فاصلهٔ آنها را که همان طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ است به دست آوریم. به نظر شما با این اطلاعات آیا می‌توان فاصله این دو شهر را به دست آورد؟

شکل ۲

در فعالیت زیر رابطه بین اندازهٔ زاویه و طول کمان روبه‌روی آن مشخص می‌شود.

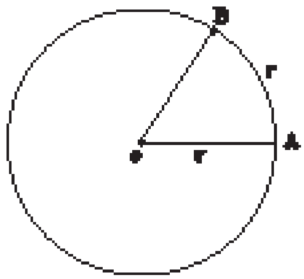
فعالیت کلاسی ۲

۱ یک قطعه نخ را به اندازه ۲۰ سانتی‌متر برش دهید، سپس دو سر این نخ را به هم وصل کنید تا دایره‌ای نظیر شکل ۳ حاصل شود. اندازه قطر و شعاع این دایره را با خط‌کش به دست آورید.



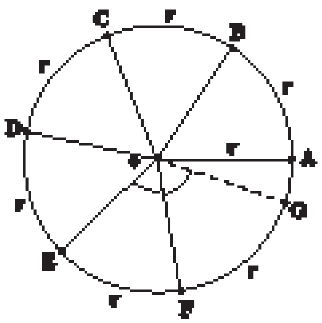
شکل ۳

۲ یک قطعه نخ به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط دایرهٔ فوق قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل ۴). اندازه زاویه AOB را با نقاله اندازه‌گیری کنید.
این زاویه تقریباً چند درجه است؟



شکل ۴

۳ مجدداً قطعه نخ فوق را از نقطه Bروی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل ۵). در این حالت زاویه‌های BoC، CoD، DoE، EoF و FoG با زاویه .... برابر و هریک تقریباً .... درجه است. آیا دو نقطه G و A برهم منطبق می‌شوند؟
به این ترتیب ۶ زاویه مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با .... دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها یک رادیان می‌گوییم.



شکل ۵

> ۱ رادیان برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی در یک دایره به شعاع r که طول کمان روبه‌روی آن برابر با r است.

در شکل ۵ مشاهده می‌کنید که :

$\angle AoB =$ ۱ رادیان $= \dfrac{\text{طول کمان AB}}{\text{شعاع دایره}} \simeq$ °۵۷

$\angle AoE = \ldots\ldots\ldots = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$

$\angle AoC =$ ۲ رادیان $= \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$

$\angle AoF = \ldots\ldots\ldots = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$

$\angle AoD = \ldots\ldots\ldots = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$

$\angle AoG = \ldots\ldots\ldots = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots \simeq$ محیط دایره

۴ با تغییر محیط دایره فعالیت فوق را از ابتدا انجام دهید. آیا نتایج فوق تغییری می‌کند؟

به این ترتیب :

$$\text{اندازه یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه برحسب رادیان باشد آن‌گاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

کار در کلاس ۱

با استفاده از رابطه فوق جدول زیر را کامل کنید :

۵۰۰ سانتی‌متر		۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی‌متر			l
۵ متر	۲۰ سانتی‌متر		۱۰ متر		۱ متر	۰/۵ متر	۵ سانتی‌متر	r
	۲۰ رادیان	۱۰ رادیان		۳ رادیان		۱/۵ رادیان	۱ رادیان	α

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید.

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان	**زاویه برحسب رادیان**
دقیقاً °۱۸۰	تقریباً	تقریباً	تقریباً	تقریباً °۵۷	تقریباً	**زاویه برحسب درجه**

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با .... درجه یا .... رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم‌صفحه برابر است با .... رادیان. در نتیجه :

$$\text{یک درجه} = \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}$$

به این ترتیب :

π رادیان $= 180^\circ$

$\xrightarrow{\div 2}$ ...... رادیان $= 90^\circ$

$\xrightarrow{\div 3}$ $\frac{\pi}{3}$ ...... = ...

$\xrightarrow{\div 4}$ ...... رادیان ......

$\xrightarrow{\div 6}$ ...... رادیان $= 30^\circ$

کار در کلاس ۲

مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}}$ $\frac{\pi}{6}$ رادیان

$36^\circ \longrightarrow$ ....

$45^\circ \longrightarrow$ ....

$60^\circ \longrightarrow$ ....

$90^\circ \longrightarrow$ ....

$180^\circ \longrightarrow$ ....

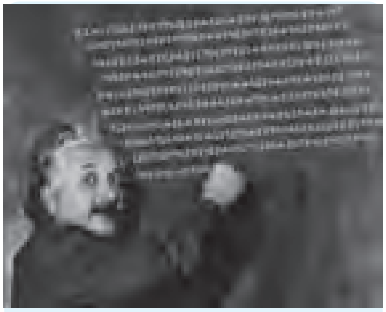
$360^\circ \longrightarrow$ ....

اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد آنگاه

$$\frac{D}{R} = \frac{\pi}{180}$$

حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

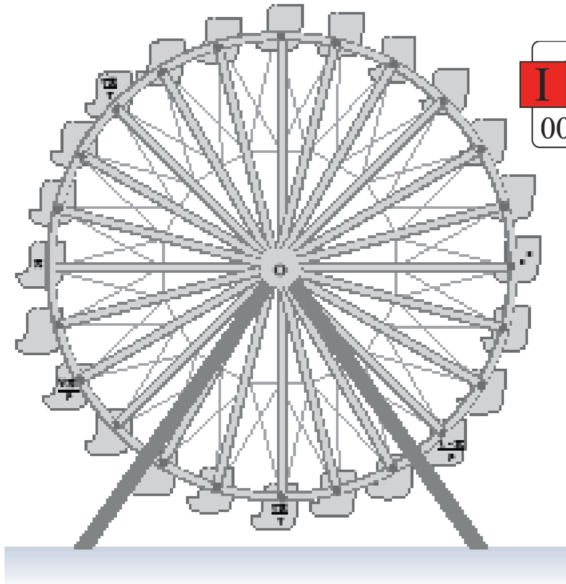
D (درجه)	5°		24°		120°	
R (رادیان)		$\frac{\pi}{7}$		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{5\pi}{4}$



روز چهاردهم مارس (۲۴ اسفند) هر سال به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سال‌روز تولد آلبرت انیشتین نیز است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد.

کار در کلاس ۳

در شکل ۱ زوایا برحسب درجه روی یک دایره مثلثاتی مشخص شده بود. با توجه به این شکل، در هریک از جاهای خالی شکل ۶ زاویه مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



شکل ۶

حال می‌توانید پاسخ فعالیت کلاسی ۱ را بدهید. به این منظور :

۱ اندازه زاویه مرکزی حاصل بین دو شهر خمین و لاهیجان را بیابید.

$۴^\circ = ... - ......$ = اندازه زاویه مرکزی AoB (برحسب درجه)

۲ این زاویه را به رادیان تبدیل کنید.

...... رادیان = ... × ۴° = اندازهٔ زاویه مرکزی AoB (برحسب رادیان)

۳ طول کمان روبه‌روی زاویه AoB را با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ به طور تقریبی محاسبه کنید.

فاصله تقریبی شهر خمین و لاهیجان روی کره زمین (طول کمان $\overset{\frown}{AB}$)

= رادیان × شعاع کره زمین = ... × ...... = $۱۴۲\pi \simeq$ ......

لذا فاصله تقریبی این دو شهر روی کره زمین .... کیلومتر است.

توجه کنید فاصله جاده‌ای بین این دو شهر حدود ۵۶۰ کیلومتر است.

کار با ماشین حساب

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه نمود. در اغلب ماشین حساب‌های دکمه‌ای با نماد π وجود دارد که با فشار آن مقدار این نماد نمایان می‌شود. مثلاً برای محاسبه ۱ رادیان کافی است حاصل $۱ \times \frac{۱۸۰}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر است با $۵۷/۳^\circ$، حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را با ماشین حساب به دست آورید.

۰/۵ رادیان، $\frac{۴}{۵}$ رادیان، ۲ رادیان، ۳ رادیان

۳/۱۴ رادیان، $\frac{\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۴}$ رادیان، π رادیان.

تمرینهای درس اول

۱ هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل نموده و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

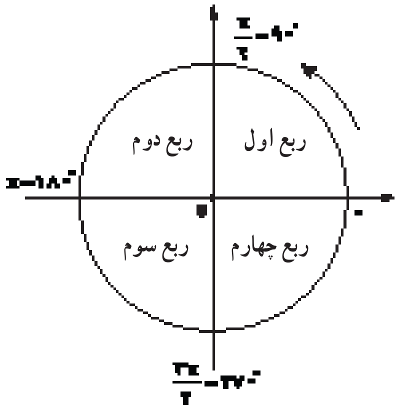
۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{۱۸}$، $\frac{-۲\pi}{۵}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۷\pi}{۸}$، $\frac{۶\pi}{۵}$ را به درجه تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۳ شهر کرمان دارای طول جغرافیایی ۵۷° و عرض جغرافیایی ۳۰° و شهر بجنورد در استان خراسان شمالی دارای طول جغرافیایی تقریبی یکسان با شهر کرمان و عرض جغرافیایی ۳۷° است. فاصلهٔ تقریبی این دو شهر روی کره زمین تقریباً چند کیلومتر است؟

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبتهای مثلثاتی

در سال گذشته با مفاهیم دایرهٔ مثلثاتی، جهت مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی آشنا شدید. در شکل۱ یک دایره مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول ۱ علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر مربع را نشان می‌دهد.



شکل ۱

ربع / نسبت	اول $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

جدول ۱

فعالیت کلاسی ۱

علامت هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را در جدول ۲ مشخص کنید.

علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان	زاویه	علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان	زاویه
$\cos\frac{3\pi}{4}<0$	ربع دوم	$\frac{3\pi}{4}$	$\tan 75^\circ>0$	ربع اول	75°
$\sin\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$	$\sin 150^\circ$		150°
$\tan\frac{5\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$	$\cos 210^\circ$		210°
$\cos\frac{5\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$	$\cot 240^\circ$		240°
$\cot\frac{5\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$	$\tan 285^\circ$		285°

جدول ۲

فعالیت کلاسی ۲

اگر $\sin\alpha=\frac{-1}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dots\dots \overset{\cos\alpha<0}{\Longrightarrow} \cos\alpha=-\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\ldots\ldots\Rightarrow\tan\alpha=\ldots\ldots$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\ldots\ldots\Rightarrow\cot\alpha=۲\sqrt{۲}$$

0020

فعالیت کلاسی ۳

اگر $\cot\alpha=-۲$ و $\cos\alpha>۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha>۰$ و $\cot\alpha<۰$ لذا انتهای کمان α در ربع .... واقع است. بنابراین :

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}=۱+\cot^۲\alpha=\ldots\ldots\ldots\Rightarrow\sin^۲\alpha=\ldots\ldots\ldots\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=\ldots\ldots\ldots\Rightarrow\cos\alpha=\ldots\ldots\ldots$$

$$\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\ldots\ldots\ldots$$

0021

کار در کلاس ۱

اگر $\cos x=\frac{-۴}{۵}$ و $\sin x>۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را بیابید.

0022

فعالیت کلاسی ۳

جدول ۳ را برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص کامل کنید.

زاویه / نسبت	۰°	$۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}$	۴۵° —	$۶۰^\circ=\frac{\pi}{۳}$	$۹۰^\circ=\frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰^\circ=\pi$	$۲۷۰^\circ=\frac{۳\pi}{۲}$	$۳۶۰^\circ=۲\pi$
sin		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$			-۱	۰
cos	۱		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$			-۱		
tan					تعریف نشده		تعریف نشده	
cot			۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$				

جدول ۳

کار در کلاس ۲

حاصل $\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}\times\sin\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

کار در کلاس ۳

حاصل کسر مقابل را به دست آورید :

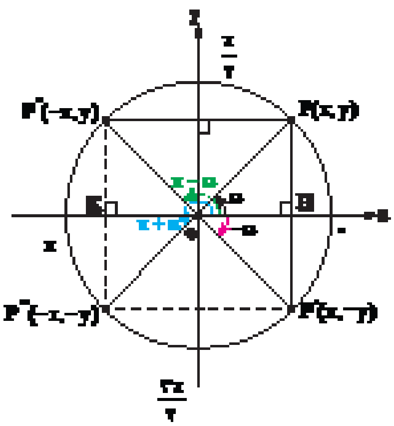
$$\frac{\tan^{۲}\frac{\pi}{۶}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}}{\cot^{۲}\frac{\pi}{۴}-\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}}=$$

کار در کلاس ۴

ثابت کنید :

$$\frac{۱+\sin x}{\sin x}+\frac{\cot x-\cos x}{\cos x}=\frac{۲}{\sin x}$$

در ادامه روابطی را مطرح می‌کنیم که با استفاده از آنها می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زوایای مورد نظر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای مذکور در جدول ۳ به دست آورد و به این ترتیب با استفاده از این جدول به‌صورت سریع‌تر حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مفروض را محاسبه نمود. ابتدا به شکل ۲ توجه کنید که مختصات قرینه نقطه P نسبت به هر دو محور افقی و عمودی و مبدأ مختصات روی دایره مثلثاتی مشخص شده است. در این حالت زاویه‌های α، $-\alpha$، $\pi-\alpha$ و $\pi+\alpha$ را در شکل ۲ مشاهده می‌کنید.



شکل ۲

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت کلاسی ۴

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل ۲، $\alpha=۳۰^\circ$ نسبت‌های مثلثاتی زاویه -۳۰° در مثلث $OP'H$ عبارت‌اند از :

$\sin(-۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$

$\cos(-۳۰^\circ) = ...=......= \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{x} = ...= ......$

$\cot(-۳۰^\circ) = ... = ...=......$

در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

p 0026

کار در کلاس ۵

نسبت‌های مثلثاتی $-\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

p 0027

فعالیت کلاسی ۵

حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳}).\cos(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۳} \times \cos\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۴} = -\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = -\frac{۵}{۲}$$

a) $\frac{\cos(-۹۰^\circ) + \sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ) - \cos(-۳۶۰^\circ)} = \frac{............}{............} = ...$

b) $\cot(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۳}) = ...$

c) $\cos(-۴۵^\circ) \times \cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ) \times \sin(-۶۰^\circ) = ...+.........=.........$

p 0028

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت کلاسی ۶

دو زاویه α و β را مکمل گوییم هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگر هستند. همچنین دو زاویه $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ مکمل یکدیگر هستند. در شکل ۲ اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'' و انتهای کمان زاویه ۱۵۰° که

در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = y = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$\tan ۱۵۰^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cot ۱۵۰^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

0029 **کار در کلاس ۶**

مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

a) ۷۵° b) -۲۵° c) $\frac{\pi}{۱۲}$ d) $\frac{-\pi}{۴}$

0030 **کار در کلاس ۷**

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۵\pi}{۶}$ را مطابق نمونه به‌دست آورید.

$$\sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan\frac{۵\pi}{۶} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cot\frac{۵\pi}{۶} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

در حالت کلی :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

0031 **فعالیت کلاسی ۶**

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \ldots\ldots\ldots$

$\cos\frac{۳\pi}{۴} = \cos(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$

$\sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$\cot(-۱۲۰^\circ) = -\cot(\ldots\ldots\ldots) = -\cot(۱۸۰^\circ - \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$

$\cos(۱۳۵^\circ) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

p 0032

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت کلاسی ۷

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$ یعنی اختلاف دو زاویه ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در شکل ۲، اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -x = \ldots\ldots\ldots$$

$$\tan ۲۱۰^\circ = \frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\cot ۲۱۰^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

p 0033

کار در کلاس ۸

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۷\pi}{۶}$ را مشخص کنید.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

p 0034

فعالیت کلاسی ۸

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۲۲۵^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right) = \cos\ldots\ldots = \cos(\pi + \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) = ...$ . . . .

$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = ...$ . . . .

p 0035

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت کلاسی ۹

دو زاویه α و β را متمم گوییم هرگاه مجموع آنها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویه ۳۰° و ۶۰° متمم یکدیگر هستند. در این حالت مطابق جدول ۳،

$$\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

حال با توجه به جدول ۳، چون زاویه . . . متمم خودش است بنابراین :

$\sin ...... = \cos ...... = ...$

$\tan ...... = \cot ...... = ...$

p 0036

همچنین زاویه ...... و $\frac{\pi}{۲}$ متمم یکدیگرند، لذا :

$\sin\frac{\pi}{۲} = \cos ..... = ...$

$\tan\frac{\pi}{۲} = \cot ..... = ...$

در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$$

به عبارت دیگر : اگر دو زاویه متمم باشند آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است.

p 0037

کار در کلاس ۹

در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید :

a) $\sin x=\cos(۲۰^{\circ}+x)$

b) $\tan(x+\frac{\pi}{۱۸})=\cot(\frac{۴\pi}{۱۸}+x)$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

p 0038

فعالیت کلاسی ۱۰

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است. در ضمن $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}$ یعنی اختلاف دو زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است. لذا با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم، نسبت‌های مثلثاتی این زاویه به صورت زیر به دست می‌آیند :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(......)=-\sin\,..........=.........$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=...............=-\cot\,.........=.........$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=...............=...............=......$$

p 0039

در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

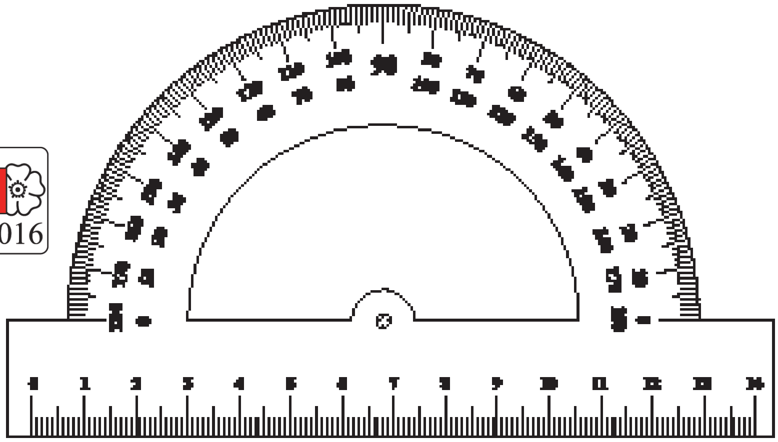
$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

کار در کلاس ۱۰

در نقاله مقابل به سئوالات زیر پاسخ دهید :



۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟ (مثلاً $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$)

۲ اختلاف کدام دو زاویه 90° می‌شود؟

نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را با استفاده از جدول ۳ به دست آورید.

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.

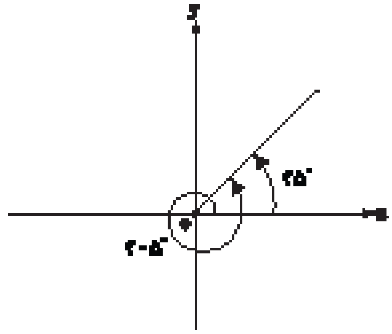
۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

فعالیت کلاسی ۱۱

دو زاویه α و β را هم انتها گوییم هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود. اگر دو زاویه هم انتها باشند اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً زاویه‌های

0017



شکل ۳

405° و 45° هم انتها هستند زیرا $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$ (شکل ۳) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 405° و 45° یکسان هستند. چون انتهای کمان زاویه 45° در ربع اول است بنابراین:

$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \ldots\ldots$

$\cos 405^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

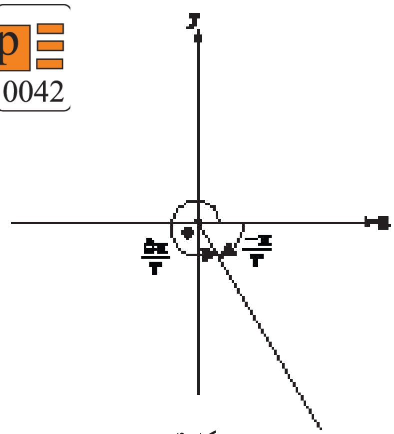
$\tan 405^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\cot 405^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

0042

حال همین بررسی را روی زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان انجام دهید. چون $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \ldots$ بنابراین دو زاویه ...... و $\frac{5\pi}{3}$ هم انتها هستند (شکل ۴).

0018



شکل ۴

چون انتهای کمان زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان در ربع چهارم است، لذا:

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{-\pi}{3}) = \ldots$

$\cos\frac{5\pi}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan\frac{5\pi}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cot\frac{5\pi}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

0043

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(2k\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$

$\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2k\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$

$\cot(2k\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha$

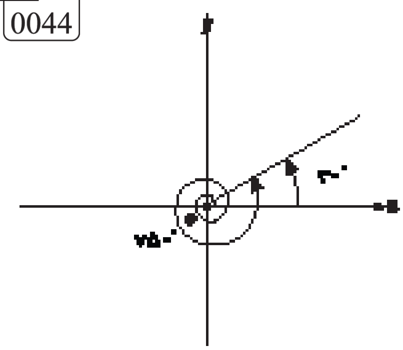
0044

کار در کلاس ۱۱

مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل ۵)

$\sin 750^\circ = \sin(750^\circ - 2\times 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

0019



شکل ۵

۱) $\cos 300^\circ = \ldots\ldots$

۲) $\sin 1110^\circ = \ldots\ldots$

۳) $\tan(-225^\circ) = \ldots\ldots$

۴) $\cot(-330^\circ) = \ldots\ldots$

۵) $\sin\frac{۱۱\pi}{۴} = ...$

۶) $\cos(\frac{-۷\pi}{۴}) = ...$

0045

تمرین‌های درس دوم

۱ آیا زوج زاویه‌های زیر قرینه‌اند؟

a) ۷۵° و $\frac{-۵\pi}{۱۲}$ b) -۹۰° و ۲۷۰° c) ۱۲۰° و $\frac{-۸\pi}{۱۲}$ d) $-\pi$ و ۰

e) $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{-۹\pi}{۱۲}$

0046

۲ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

۱) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ =$

۲) $\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶} =$

۳) $\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan(\frac{-۴\pi}{۳}) =$

۴) $\cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) =$

۵) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) =$

۶) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan ۷۲۰^\circ - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

۷) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳}) - \cos(\frac{۲۳\pi}{۴}) =$

0047

۳ جدول زیر را کامل کنید :

زاویه / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
sin								
cos								
tan								
cot								

0048

۴ بدون استفاده از ماشین حساب صحت تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ ۲) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

۳) $\tan(-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$ ۴) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

0049

کار با ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۱۵° و ۷۵° را به طور تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت درجه باشد).

$\sin ۷۵^\circ = \cos ۱۵^\circ \simeq ۰/۹۶۵۹$

0020

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\frac{\pi}{۸}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ را به طور تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد).

$\sin\frac{۳\pi}{۸} = \cos\frac{\pi}{۸} \simeq ۰/۰۲۰۵۶۰$

0021

حاصل هر یک از نسبت‌های زیر را با ماشین حساب به طور تقریبی به دست آورید.

$\tan ۲۰^\circ$ و $\sin\frac{\pi}{۱۵}$ و $\cos ۱۰۵^\circ$ و

$\tan\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cos\frac{۵\pi}{۹}$ و $\tan ۱۷۰^\circ$

درس سوم

توابع مثلثاتی

رسم تابع سینوس

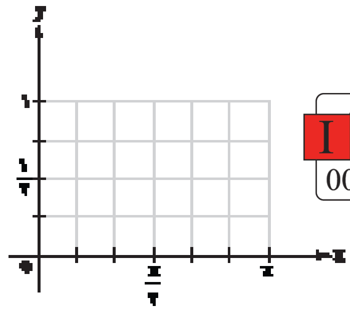
فعالیت کلاسی ۱

۱ جدول زیر را کامل کنید. مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},....),(.... , ...),(.... , ...),(.... , ...)\right\}$$

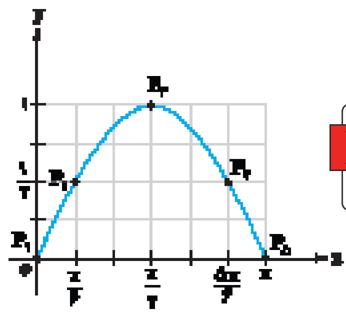
نام نقطه	x	y=sinx	مختصات نقطه
$P_{۱}$	۰	۰	(۰,۰)
$P_{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	...	...
$P_{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	...	...
$P_{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	...	...
$P_{۵}$	π	...	...

جدول ۱



شکل ۱

۲ نقاط $P_{۱}$ تا $P_{۵}$ را در شکل ۱ مشخص کنید.



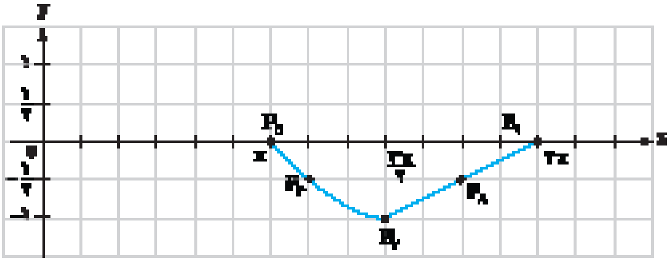
شکل ۲

۳ نقاط حاصل در شکل ۱ را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید تا منحنی شکل ۲ حاصل شود. شکل حاصل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را در بازهٔ $[۰ , \pi]$ مشخص می‌کند.

0052 ۴ مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ انجام دهید. برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید و سپس نقاط حاصل در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل ۳ مشخص نموده و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	y=sinx	x	نام نقطه
$(\pi,0)$	0	π	P_5
...	...	$\frac{7\pi}{6}$	P_6
...	...	$\frac{3\pi}{2}$	P_7
...	$\frac{-1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	P_8
...	...	2π	P_9

0025

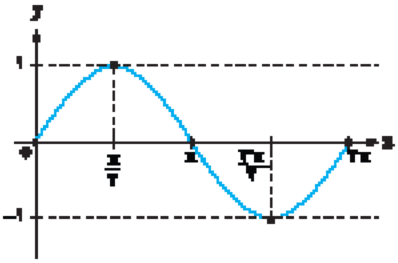


شکل ۳

0053 ۵ با توجه به شکل‌های ۲ و ۳، نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x$ در بازه $[0$ و $2\pi]$ در شکل ۴ رسم شده است. حال با توجه به شکل جدول زیر را در خصوص این تابع تکمیل کنید.

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.			
تابع در ربع اول صعودی است.			

0026



شکل ۴

0054 ۶ با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی که در درس قبل آشنا شدید، جاهای خالی را در تساوی‌های زیر پر کنید.

$\sin(x+2\pi)=\sin x$

$\sin(x+4\pi)=\ldots\ldots$

$\sin(x+6\pi)=\ldots\ldots$

$\sin(x-4\pi)=\ldots\ldots$

$\sin(x-8\pi)=\ldots\ldots$

$\sin(x+2k\pi)=\ldots\ldots \quad (k\in\mathbb{Z})$

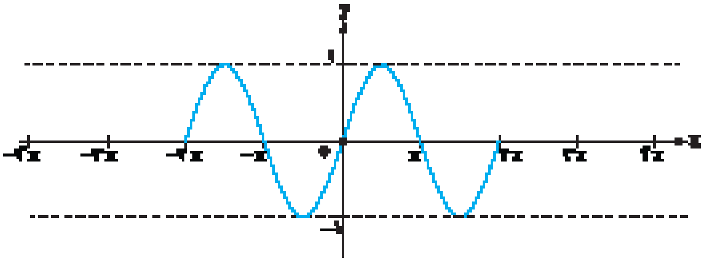
0055 ملاحظه می‌کنید که مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مقادیر زوج π به کمان آنها تغییری نمی‌کند. در این حالت می‌گوییم تابع سینوس متناوب است.

تابع f را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی چون T وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در دامنه تابع f،

$$f(x+T)=f(x)$$

عدد T را دوره تناوب تابع f می‌نامند و کوچک‌ترین مقدار مثبت T را در صورت وجود دوره تناوب اصلی تابع f می‌نامند که به‌طور خلاصه همان دوره تناوب f نامیده می‌شود.

بنابراین تابع به ضابطهٔ y=sinx متناوب با دوره متناوب $T=2\pi$ است. می‌دانید دانستن دوره تناوب یک تابع چه اهمیتی دارد؟
در شکل ۵ نمودار تابع سینوس در ۴ تناوب رسم شده‌است. شکل را کامل کنید.



شکل ۵

۷ با توجه به شکل ۵ جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ y=sinx کامل کنید.

a) دامنه تابع سینوس .... و برد آن .... است.

b) با توجه به فرمول‌های زاویه‌های قرینه، تابع سینوس تابعی ..... است و لذا نمودار تابع نسبت به مبداء مختصات ..... است.

c) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ...... است که طول‌های $x=\frac{\pi}{2}$، x=.....، x=.....، x=.....، x=...... و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، حاصل می‌شود.

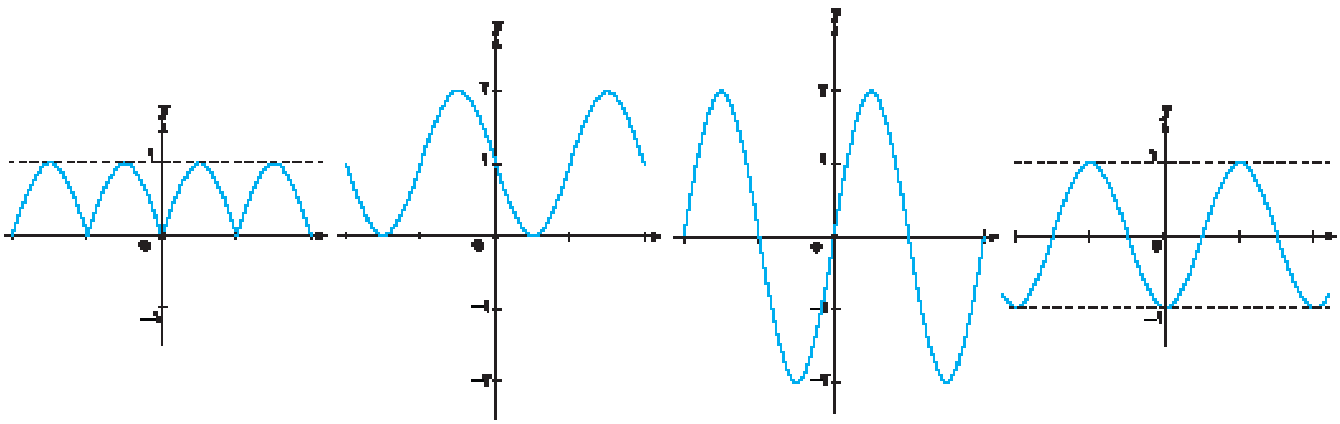
d) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که طول‌های $x=\pm 2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، حاصل می‌شود

e) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با ..... است.

کار در کلاس ۱

مشخص کنید هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y=2\sin x$ ۲) $y=|\sin x|$ ۳) $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ۴) $y=-\sin x+1$



(a) (b) (c) (d)

رسم تابع کسینوس

فعالیت کلاسی ۲

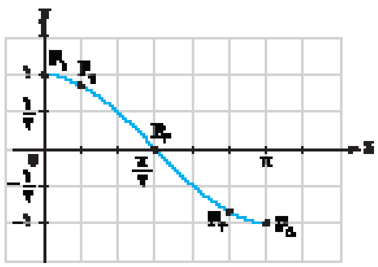
۱ جدول زیر را کامل کنید تا مجموعه زوج‌های مرتب زیر حاصل شود.

f={(۰,۱),(,   ),(,   ),(,   ),(,   )}

مختصات نقطه	y=cosx	x	نام نقطه
(۱,۰)	۱	۰	$P_۱$
$(\frac{\pi}{۴},۰/۷)$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq ۰/۷$	$\frac{\pi}{۴}$	$P_۲$
....	....	$\frac{\pi}{۲}$	$P_۳$
....	....	$\frac{۳\pi}{۴}$	$P_۴$
....	....	π	$P_۵$

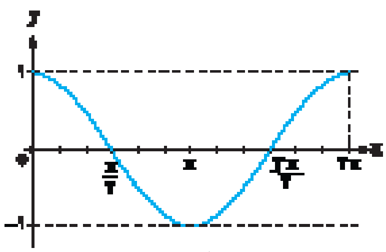
این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند. (چرا؟)

۲ نقاط جدول فوق را در صفحه مختصات مشخص و به ترتیب آنها را به یکدیگر وصل کنید تا شکل ۶ حاصل شود. به این ترتیب نمودار تابع کسینوس در بازه $[۰,\pi]$ رسم می‌شود.



شکل ۶

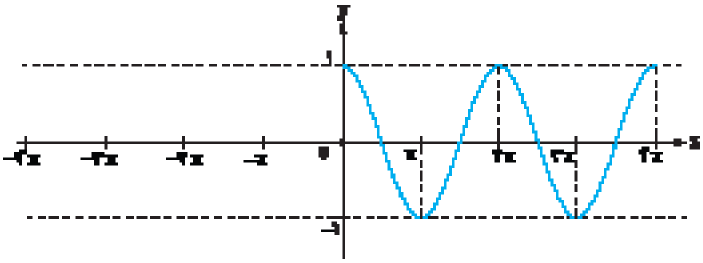
۳ با افزودن نقاطی به جدول فوق با طول‌های $x=\frac{۵\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴},۲\pi$ و تکمیل جدول، نمودار تابع کسینوس را در بازه $[۰و۲\pi]$ به صورت شکل ۷ به‌دست آورید. حال با توجه به این شکل جدول زیر را برای تابع با ضابطهٔ y=cosx کامل کنید.



شکل ۷

$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$
			مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.
			تابع در ربع اول نزولی است.

۴ مشابه با تابع سینوس در فعالیت کلاسی قبلی می‌توان دید که تابع با ضابطهٔ y=cosx متناوب با دوره تناوب ..... است. در شکل ۸ نمودار تابع کسینوس در ۴ تناوب رسم شده است. شکل را کامل کنید.



شکل ۸

۵ با توجه به شکل ۸ جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ y=cosx کامل کنید.

a) دامنه تابع کسینوس .... و برد آن .... است.

b) با توجه به فرمول‌های زوایای قرینه، تابع کسینوس تابعی زوج است و لذا نمودار تابع نسبت به .... متقارن است.

c) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در طول‌های x=۲kπ، $k\in\mathbb{Z}$، حاصل می‌شود.

d) حداقل مقدار تابع کسینوس ...... است که در طول‌های .... حاصل می‌شود.

e) مقدار تابع کسینوس در طول‌های .... برابر با صفر است.

کار در کلاس ۲

مشابه نمونه، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را رسم کنید. (شکل ۹)

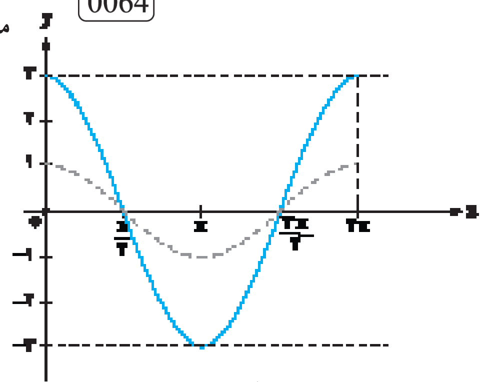
y=۳cos x

۱) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

۲) y=cos (−x)−۱

۳) y= |cosx|

۴) y= cos (x−۱)+۱



شکل ۹

تمرین‌های درس سوم

۱ مشخص کنید آیا نمودار زوج توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

۱) $y=\sin x$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x$, $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

۳) $y=\cos x$, $y=\cos(۲\pi-x)$

۴) $y=\sin x$, $y=\sin(۵\pi-x)$

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در صفحه مختصات رسم کنید.

۱) $y=۱+\sin(x+۱)$

۲) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

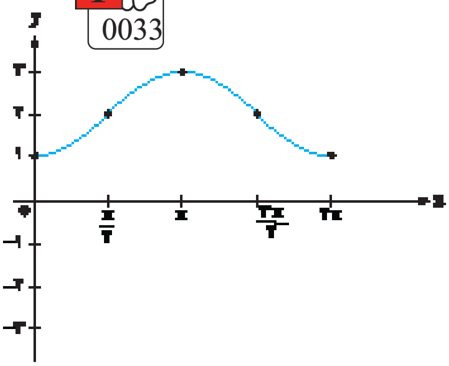
۳) $y=|۱-\sin x|$

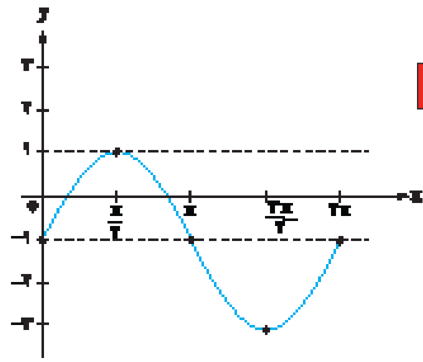
۴) $y=\frac{\pi}{۲}+\cos(-x)$

۵) $y=\frac{۱}{۲}\sin x$

۶) $y=۲\cos x+۱$

۳ با توجه نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر دارای کدام یک از ضابطه‌های داده شده هستند؟





الف) $y=۲\cos x+۱$

ب) $y=۲\sin x-۱$

ج) $y=۲-\cos x$

د) $y=\sin x-۲$

۴ کدام یک از توابع با ضابطه‌های زیر زوج و کدام یک فرد هستند؟

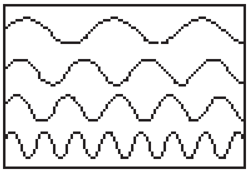
الف) $y=\frac{\sin x}{x}$

ب) $y=\sin x.\cos x$

ج) $y=x.\cos x$

د) $y=۱+\cos x$

✓ اصوات به‌صورت مخلوطی از موج‌های سینوسی شکل با بسامدهای مختلف می‌توانند نمایش داده شوند.



موج با بسامد پایین‌تر

موج با بسامد بالاتر

✓ دانشمندان ایرانی ــ اسلامی نقش مؤثری در علم مثلثات ایفا نمودند. در اوایل قرن نهم میلادی محمدبن موسی خوارزمی جداول دقیقی از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت را معرفی نمود. وی همچنین در بحث مثلثات روی کره پیشگام بود. در قرن دهم میلادی ابوالوفا بوزجانی جداول نسبت‌های مثلثاتی را توسعه داد و روابط جدیدی برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی و حل مثلث ارائه نمود. در موضوع روش مثلث‌بندی ریاضی‌دانان مسلمان اولین افرادی بودند که سهم بسزایی در توسعه آن داشتند از جمله آنها ابوریحان بیرونی در اوایل قرن یازدهم میلادی بود. وی روش مثلث‌بندی را برای اندازه‌گیری کره زمین و محاسبه فاصله بین مکان‌های مختلف معرفی کرد. در اواخر قرن یازدهم میلادی عمر خیام با به‌کارگیری جداول مثلثاتی معادلات درجه سوم را حل نمود. در قرن سیزدهم میلادی خواجه‌نصیرالدین طوسی اولین فردی بود که مثلثات را به عنوان یک سبک ریاضی در کتاب خود به نگارش درآورد. وی که یک ستاره‌شناس بود مثلثات کروی را مورد توجه قرار داد و قوانینی در این شاخه ارائه نمود. در قرن پانزدهم میلادی غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوانین جدیدی را در بحث حل مثلث و مثلث‌بندی مطرح کرد. وی همچنین مقادیر تابع سینوس در جدول توابع مثلثاتی را تا ۸ رقم اعشار برای زوایای ۱°، ۲°، ۳°، ......، ۹۰° محاسبه نمود. وی عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشاری ارائه نمود.

فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

درس اوّل: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

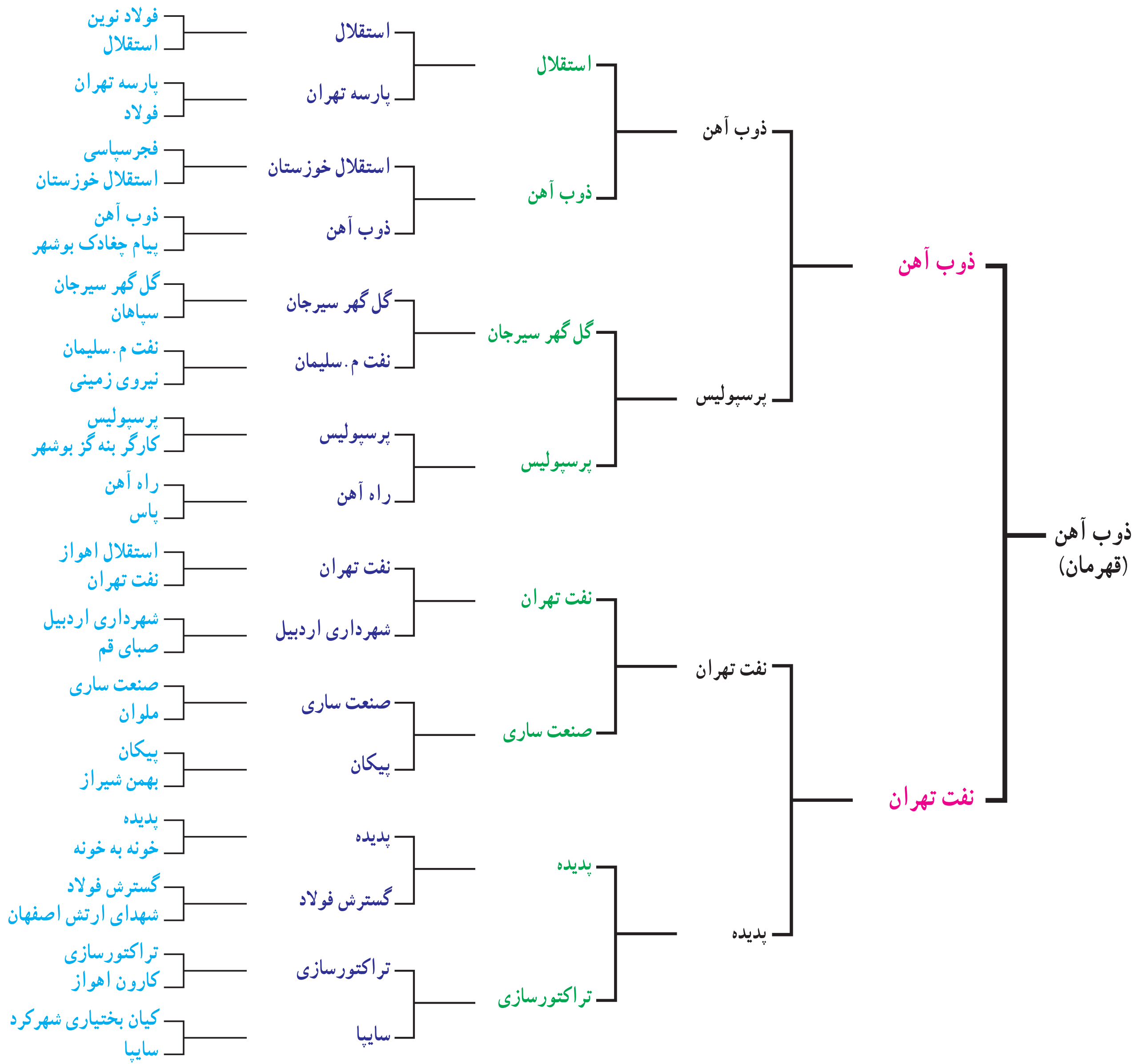
درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اوّل

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت کلاسی ۱

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴ــ۹۳ باشرکت ۳۲تیم ودر پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا فینال به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می بینید در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود وتیم بازنده حذف می‌شود. (به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.)



۱ درفینال چند تیم حضور دارند؟ ....

۲ در مرحلهٔ قبل از فینال چند تیم حضور دارند؟ ....

۳ تعداد تیم ها در هرمرحله با تعداد تیم ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ ....

۴ چه رابطه ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟ ....

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم های اولیه چند تاست؟ ....

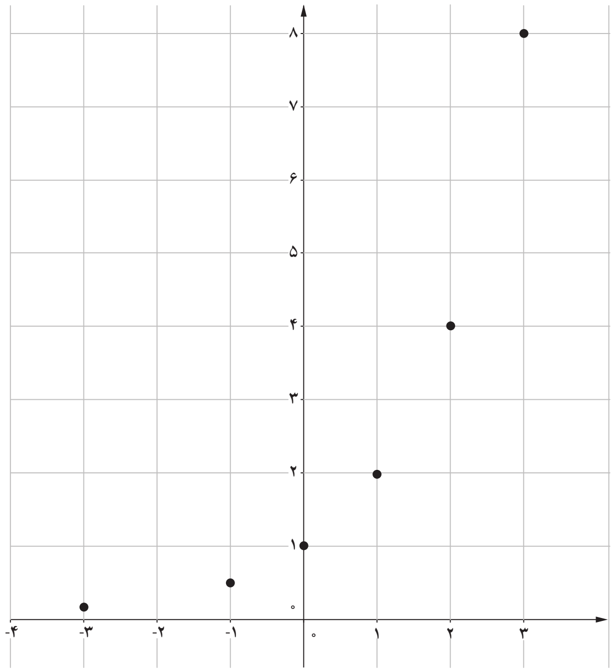
۶ اگر تعداد مراحل x وتعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ ....

فعالیت کلاسی ۲

۱ جدول روبه‌رو را کامل نمایید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۲^x	$\frac{۱}{۸}$	......	$\frac{۱}{۲}$	......	۲	......	۸

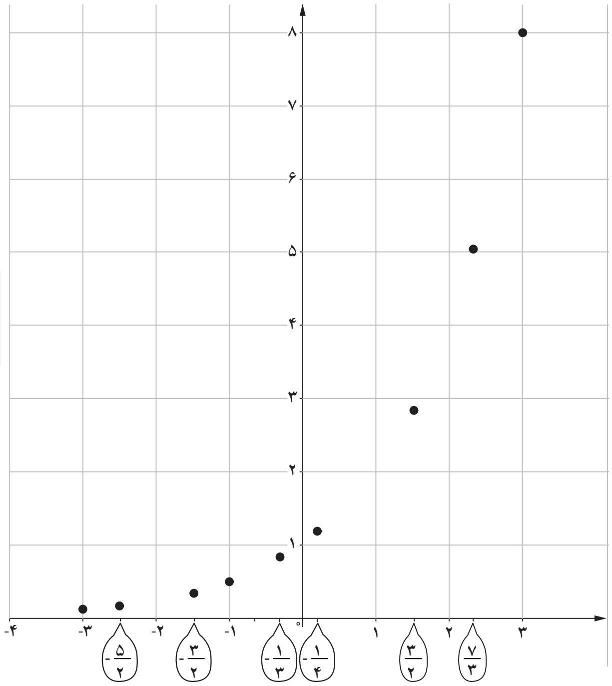
۲ نقاط جدول فوق را در نمودار روبه‌رو مشخص نموده و به هم وصل کنید.



۳ آیا نقاطی دراین جدول وجود دارد که دارای طول یکسان باشند؟

۴ جدول زیر را کامل نمایید.

x	-۴	-۳	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۷}{۳}$	۳
۲^x	....	$\frac{۱}{۸}$	~۰/۱۷	....	~۰/۳	$\frac{۱}{۲}$	~۰/۸	...	~۱/۲	...	~۲/۸	....	~۵	....



۵ نقاط جدول فوق را در نمودار روبه‌رو مشخص نموده و به هم وصل کنید. ....

۶ آیا نقاطی در این جدول وجود دارد که دارای طول یکسان باشند؟

....

۷ آیا به نظر شما این دو نمودار نشان دهندۀ یک تابع هستند؟ چرا؟

....

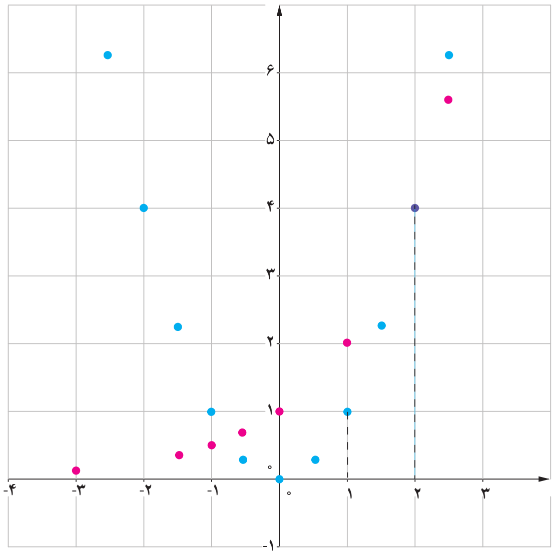
تعریف : هر تابع با ضابطۀ $y=a^x$ که $a\in IR$ و $a>۰$، $a\neq ۱$، و تابع نمایی نامیده می شود. مانند : $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ و...

کار در کلاس ۱

۱ نمودارهای توابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول های زیر رسم نمایید.

x	$-\frac{۵}{۲}$	....	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^۲$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	....	۶/۲۵

x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=۲^x$	$\frac{۱}{۸}$	....	$\sim ۰/۳$	$\frac{۱}{۲}$	$\sim ۰/۷$	....	....	۲	۴	$\sim ۵/۶۸$

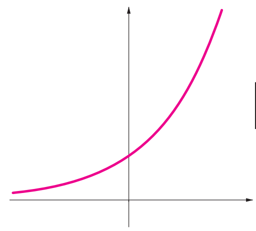


۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم کنید.

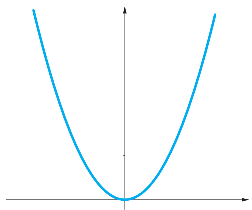
۳ در چه نقاطی مقادیر ۲^x و $x^۲$ باهم مساوی هستند؟ ....

۴ در $x^۲$، متغیر در.....و عدد ثابت در.....است ولی در ۲^x،.... درتوان و....درپایه است.

راهنمایی : نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=x^۲$ به صورت زیر می‌باشند :



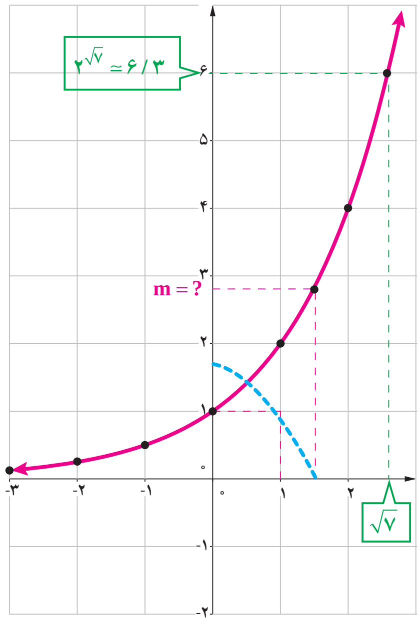
نمودار ۲^x



نمودار $x^۲$

فعالیت کلاسی ۳

درشکل روبه‌رو نمودار تابع نمایی $y=۲^x$ رسم شده است .



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض ها چه نقطه‌ای است؟

....

۲ دامنه وبرد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

....

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

....

۴ دراین نمودار، مقدار m نشان دهندهٔ چه عددی است؟ مقدار تقریبی آن را با استفاده از نمودار به دست آورید.

....

۵ به صورت مشابه، عدد $۲^{\sqrt{۵}}$ را مشخص کرده و مقدار تقریبی آن را با استفاده از نمودار به دست آورید. ....

۶ به نظر شما کدام یک از اعداد زیر بین $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارند؟

۱) $۲^{-۱}$ ۲) $۲^۵$ ۳) $۲^{\frac{۵}{۲}}$ ۴) $۲^{\frac{۳}{۲}}$

۷ کدام‌یک از اعداد زیر بین $۲^{۰/۵}$ و $۲^{۰/۱}$ قرار دارند؟

۱) $۲^{-۰/۳}$ ۲) $۲^{۰/۳}$ ۳) $۲^{۰/۸}$ ۴) $۲^۰$

۸ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟ ....

۹ فرض کنیم رابطهٔ $۲^z>۲^y>۲^x$ برقرار است، با توجه به سؤال ۸، چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ....

کار با ماشین حساب

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه $\boxed{x^y}$ وجود دارد که با استفاده از آن می توانید مقادیر اعداد توان دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبهٔ $۲^۵$، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید و سپس دکمهٔ $\boxed{x^y}$ و بعد عدد ۵ و سپس دکمهٔ تساوی را فشار می دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم.

تذکر : دربرخی از ماشین حساب‌ها به‌جای دکمهٔ x^y، نمادی به صورت $\boxed{\wedge}$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.(تا یک رقم اعشار)

$\boxed{۲} \to \boxed{x^y} \to \boxed{(} \to \boxed{۲} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \to \boxed{۲/۶}$

۱) $۲^{\sqrt{۲}}$

۲) $۲^{\sqrt{۸}}$

۳) $۲^{۰/۱}$

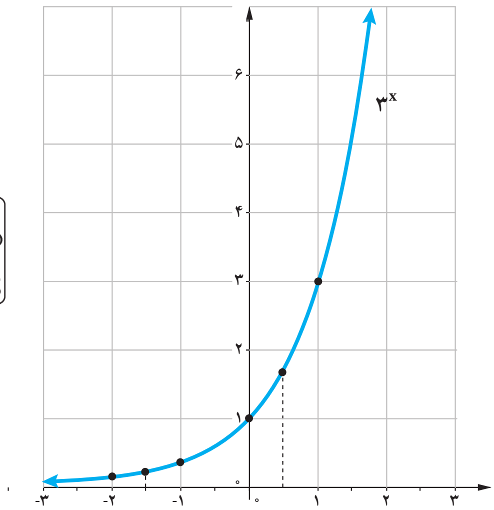
۴) $۲^{-۰/۵}$

۵) $۲^{۱+\sqrt{۳}}$

کار در کلاس ۲

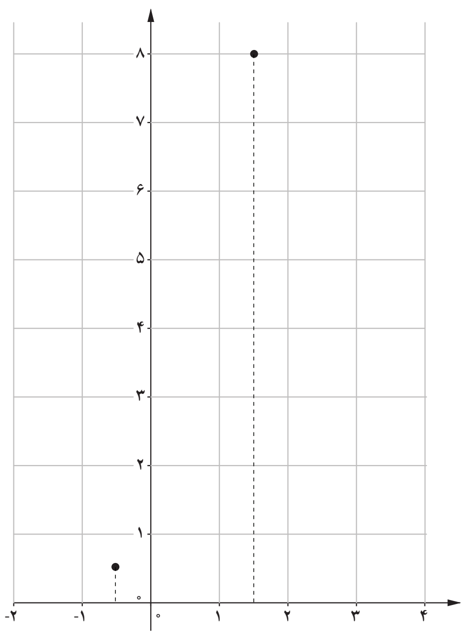
نمودار تابع $y=۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

x	$y=۳^x$
-۲	$\frac{۱}{۹}$
$-\frac{۳}{۲}$	$\sim ۰/۱۹$
-۱	$\frac{۱}{۳}$
۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\sim ۱/۷$
۱	۳



۱ جدول زیر را کامل نمایید و با استفاده از آن نمودار تابع $y=۴^x$ را رسم نمایید.

x	$y=۴^x$
.....	$\frac{۱}{۴}$
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	.....
$\frac{۱}{۲}$	.....
$\frac{۳}{۲}$	۸



۲ دامنه وبرد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. ....

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5} \bigcirc 3^{\frac{7}{3}}$ ب) $4^{\sqrt{7}} \bigcirc 4^{\sqrt{5}}$

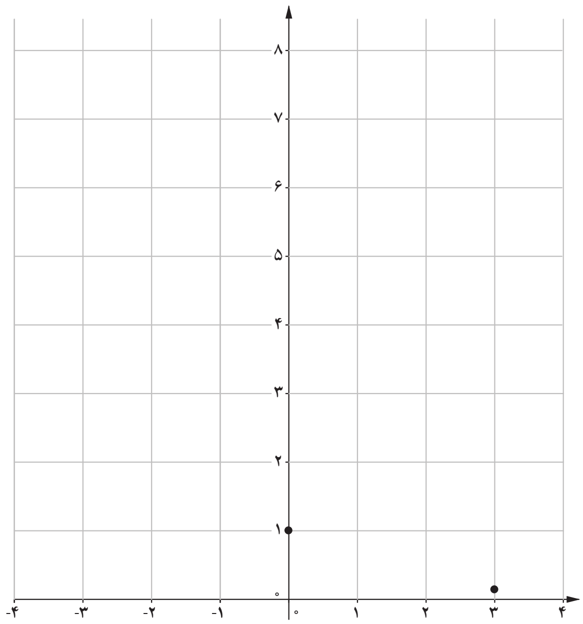
۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{x} \bigcirc 3^{y}$ ب) $4^{x} \bigcirc 4^{y}$

فعالیت کلاسی ۴

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	......	۰	۱	......	۳	......
$y=(\frac{1}{2})^x$	......	......	$\sqrt{2}$	۱	......	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	......



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور yها چه نقطه‌ای است؟

....

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

....

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

....

....

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{1}{2})^{0/5} \bigcirc (\frac{1}{2})^{1/5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{-4} \bigcirc (\frac{1}{2})^{4}$ ج) $(\frac{1}{2})^{3} \bigcirc (\frac{1}{2})^{4}$

۶ اگر $x<y$، چه رابطه ای بین $(\frac{1}{2})^{y}$ و $(\frac{1}{2})^{x}$ وجود دارد؟ ....

کار در کلاس ۳

درتابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۲})^x$ داریم :

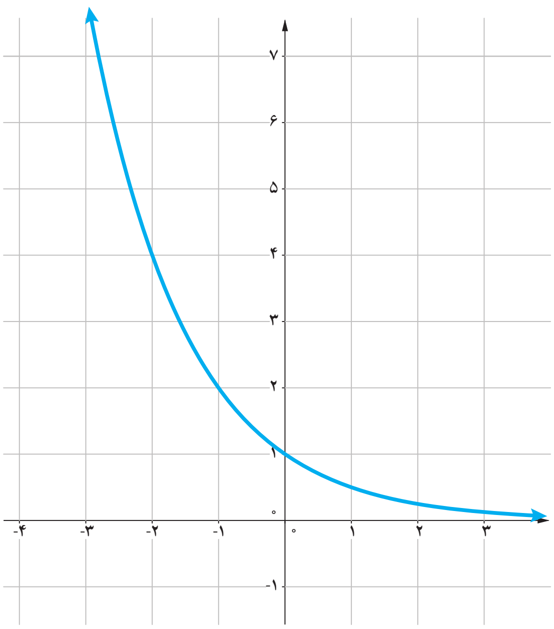
x	$(\frac{۱}{۲})^۱$	$(\frac{۱}{۲})^۲$	$(\frac{۱}{۲})^۵$	$(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$	$(\frac{۱}{۲})^{۵۰}$	$(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰}$	$(\frac{۱}{۲})^{۲۰۰}$
$y=(\frac{۱}{۲})^x$	↓ ۰/۵	↓ ۰/۲۵	↓ ۰/۰۳~	↓	↓	↓	↓ ......

۱ اگر اعداد سطر اول کوچک و کوچک تر شوند آیا صفر در سطر دوم ظاهر می شود؟

....

۲ آیا نقطه ای روی محور xها وجود دارد که نمودار $(\frac{۱}{۲})^x$ از آن عبور کند؟ یا به عبارت دیگر آیا نمودار $(\frac{۱}{۲})^x$ محور xها را قطع می کند؟ چرا؟

....

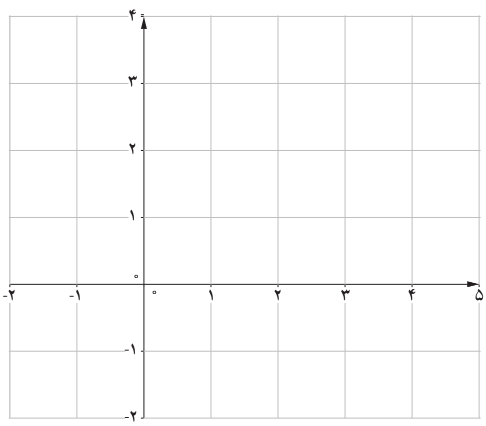


نرم افزار جئوجبرا (Geo Gebra)

با استفاده از نرم افزار جئوجبرا (Geo Gebra) می توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم نمایید. برای این کار در نوار دستور، ضابطهٔ تابع را تایپ کرده وکلید Enter را بزنید. در پنجرهٔ گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس ۴

نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم نمایید.



توان‌های حقیقی

درسال دهم، با قوانین مربوط به اعداد توان دار با توان‌های گویا وپایه های حقیقی مثبت آشنا شدید. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است. یعنی اگر x وy دو عدد حقیقی مثبت و r وs دو عدد حقیقی باشند، داریم :

۱) $x^{0}=1$

۲) $x^{-r}=\dfrac{1}{x^{r}}$

۳) $x^{r}\times x^{s}=x^{r+s}$

۴) $(x^{r})^{s}=x^{rs}$

۵) $(xy)^{r}=x^{r}.y^{r}$

۶) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{r}=\dfrac{x^{r}}{y^{r}} \quad (y\neq 0)$

۷) $\dfrac{x^{r}}{x^{s}}=x^{r-s} \quad (x\neq 0)$

فعالیت کلاسی ۵

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل نمایید.

۱ دامنهٔ تابع $y=a^{x}$ ($a>1$) اعداد حقیقی وبرد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع $y=a^{x}$ ($0<a<1$) .... وبرد آن بازهٔ $(0, +\infty)$ است.

۳ نمودار این دو تابع محورyها را درنقطهٔ .... قطع می‌نماید و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

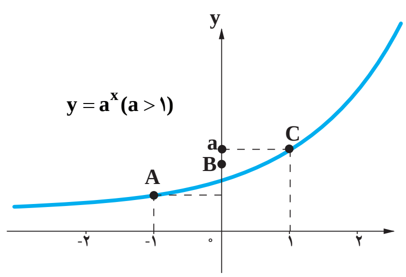
۴ این دو تابع، یک به یک .... زیرا خطوط موازی محورxها، نمودار آنها را رقطع می کند.

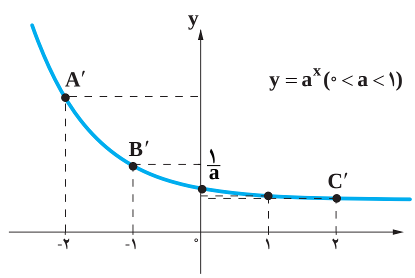
۵ نمودار این توابع در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر می باشد. مختصات نقاط زیر را تکمیل نمایید.

$A(-1, ...)$, $A'(-2, ...)$

$B(0, ...)$, $B'(........., \dfrac{1}{a})$

$C(........., a)$, $C'(2, ...)$





معادلات و نامعادلات نمایی

معادلهٔ نمایی

اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x=b^y$، آن گاه $x=y$ و به عکس. مثلاً تساوی $۲^x=۲^۸$ نتیجه می‌دهد که $x=۸$.

مثال : معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \rightarrow ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \rightarrow ۲x-۳=۴ \rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \rightarrow (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \rightarrow ۴x-۲=۳x+۳ \rightarrow x=۵$

ج) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \rightarrow ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \rightarrow ۳n-۱=۶n+۳ \rightarrow n=-\frac{۴}{۳}$

نامعادلهٔ نمایی :

اگر $b>۱$، آن گاه $b^x \geq b^y$ اگر وتنها اگر $x \geq y$. مثلاً اگر $۵^x<۵^۴$ آن گاه $x<۴$.

همچنین اگر $۰<b<۱$، آن گاه $b^x \geq b^y$ اگر وتنها اگر $x \leq y$. مثلاً اگر $(\frac{۱}{۲})^x \geq (\frac{۱}{۲})^۳$ آن گاه $x\leq۳$.

مثال :

الف) $۴^{۳p-۱}>\frac{۱}{۲۵۶} \rightarrow ۴^{۳p-۱}>۴^{-۴} \rightarrow ۳p-۱>-۴ \rightarrow p>-۱$

ب) $۲^{x-۳}\leq \frac{۱}{۳۲^۳} \rightarrow ۲^{x-۳}\leq(۲^{-۵})^۳ \rightarrow x-۳\leq-۱۵ \rightarrow x\leq-۱۲$

ج) $(\frac{۱}{۳})^{۲n+۵} < (\frac{۱}{۳})^۷ \rightarrow ۲n+۵>۷ \rightarrow ۲n>۲ \rightarrow n>۱$

تمرین‌های درس اول

۱ نمودار هر دسته از توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آنها را نسبت به هم مقایسه کنید.

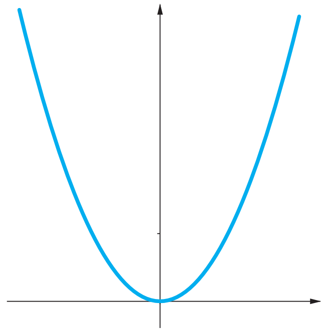
الف) $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=۵^x$

ب) $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۳})^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$

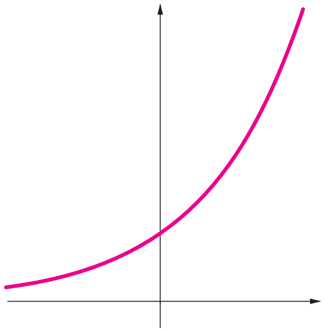
۲ کدام یک از توابع یا نمودارهای زیر، متعلق به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=۲x^۲-۳x+۱$ ب) $y=x^۳$

ج) $y=\frac{x-۱}{۲x+۱}$ د) $y-۳x=۲$



و)



هـ)

۳ کدام یک از جدول های زیر، نقاط متعلق به نمودار یک تابع نمایی را مشخص می کند؟

الف)

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{۱}{۴}$	۱	۴	۱۶	۶۴

ب)

x	−۲	−۱	۰	۱	۳	۵
y	−۳	−۱	۱	۳	۷	۱۱

ج)

x	−۳	−۲	۰	۲	۳
y	۲۷	۹	۰	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$

د)

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{۵}{۲}$	۱	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۴}{۲۵}$	$\frac{۸}{۱۲۵}$

هـ)

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
y	۱۱	۲	−۱	۲	۱۱	۲۶

۴ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ قرار دارند.

ج) (۰,۱) — ب) (۳,۱) — الف) (۱,۰)

و) $(-۱,\frac{۱}{۳})$ — هـ) (۱,۳) — د) $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$

۵ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{1}{2} , \sqrt{5})$ روی نمودار $y=5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار $y=10^x$ با محور yها، نقطهٔ $(0,10)$ است.

ج) دامنهٔ توابع $y=2^x$ و $y=x^2$ مساوی هستند.

د) محل تقاطع نمودار $y=6^x$ بامحور xها، نقطهٔ $(6,0)$ است.

۶ معادلات ونامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$

ب) $9^{3y-3}=27^{2y+1}$

پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$

ت) $5^{2x+3}\leq 125$

ث) $3^{6x-5}>81$

ج) $4^{2a-6}\leq 16^{3a-1}$

چ) $3^{3x+2}>27^{2x-1}$

ح) $(\frac{1}{3})^{2x-3}\geq 3^{-x}$

خ) $(\frac{1}{5})^{n}<(\frac{1}{25})^{2n-1}$

درس دوم

تابع لگاریتمی و لگاریتم

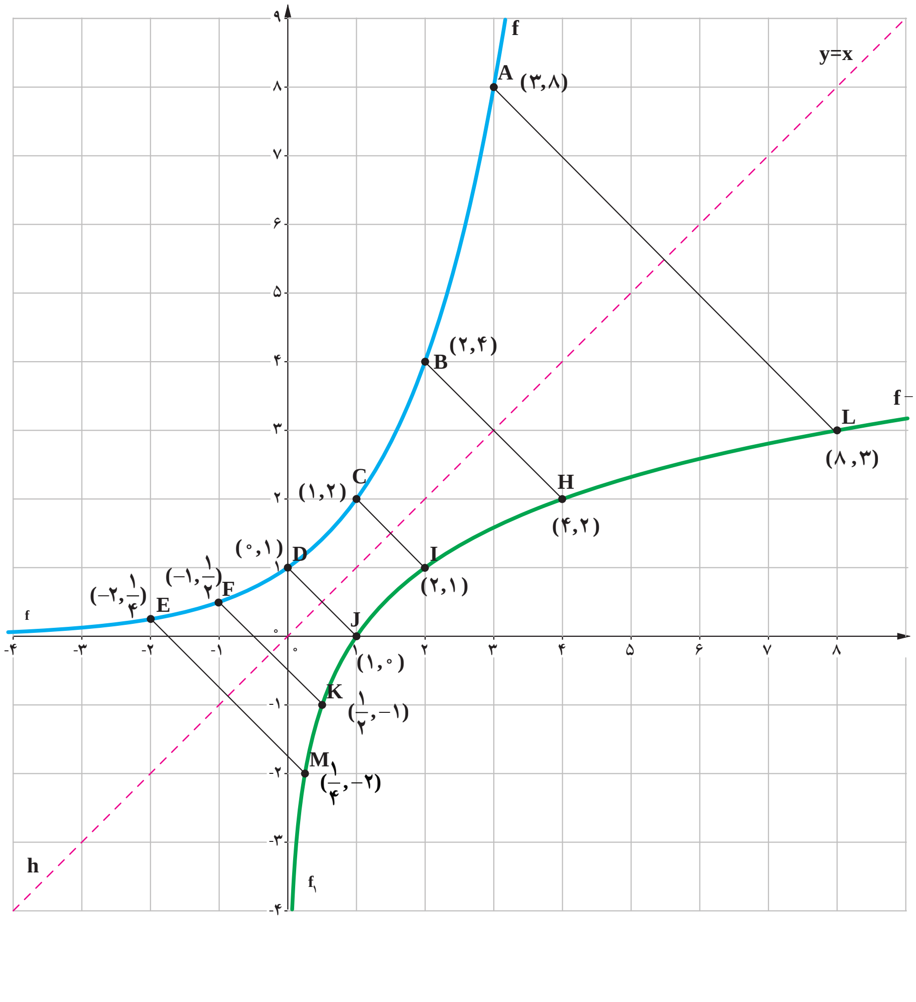
بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در بر می‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد و یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی و ... مشهود است.

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

تابع لگاریتمی

فعالیت کلاسی ۱

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ و نمودار آن آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید این تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. نمودار این تابع f و وارون آن $f^{-۱}$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط y=x قرینه هستند.



نمودار (۱)

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار (۱) را به‌دست آورید.

....

۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار (۱) ،جاهای خالی را تکمیل کنید.

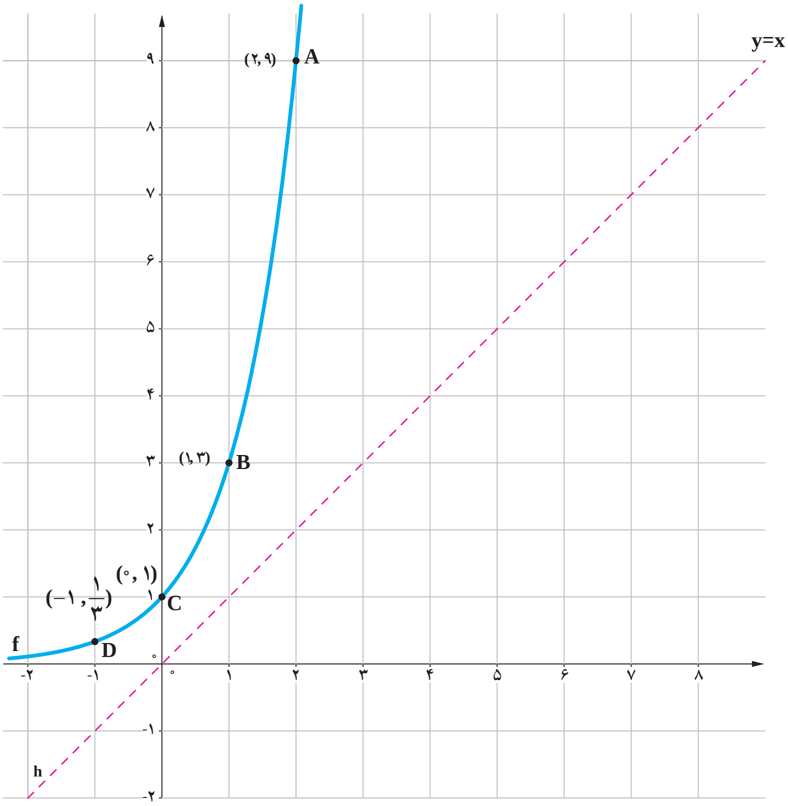
۱) $f(-۲)=\frac{۱}{۴}$ ۳) $f(-۱)=$ .... ۵) $f(۰)=$ .... ۷) $f(۲)=$ ....

۲) $f^{-۱}(\frac{۱}{۴})=$ ...... ۴) $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=$ .... ۶) $f^{-۱}(۱)=$ .... ۸) $f^{-۱}(۴)=$ ....

کار در کلاس ۱

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



نمودار (۲)

۲ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

....

۳ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار (۲)، جاهای خالی را تکمیل کنید.

۱) $f(-۲)=\frac{۱}{۹}$ ۳) $f(۰)=$ .... ۵) $f(۱)=$ .... ۷) $f($.......$)=۹$

۲) $f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=$ .... ۴) $f^{-۱}(۱)=$ .... ۶) $f^{-۱}($.......$)=۱$ ۸) $f^{-۱}(۹)=$ ....

تذکر

در کار در کلاس ۱، $f^{-1}(x)$ را به صورت $\log_{۳}x$ (می‌خوانیم لگاریتم x در مبنای ۳) نشان می‌دهیم و مثلاً تساوی $f^{-1}(\frac{۱}{۹})=-۲$ به معنای آن است که مقدار عددی لگاریتم $\frac{۱}{۹}$ در مبنای ۳ برابر ۲− است، یعنی : $\log_{۳}(\frac{۱}{۹})=-۲$

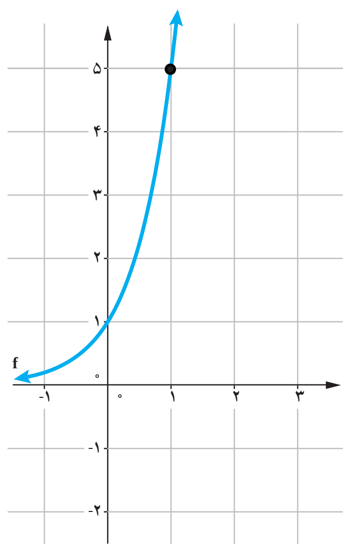
تعریف : وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به‌صورت $\log_a x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم : لگاریتم x در مبنای a.

تذکر

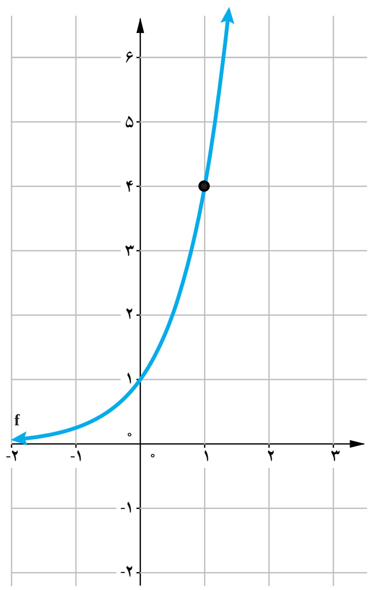
اگر $f(x)=a^x$ آنگاه $f^{-1}(x)=\log_a x$ و اگر $f(x)=\log_a x$ آنگاه $f^{-1}(x)=a^x$. در تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$، a همواره عددی مثبت و مخالف ۱ است، در تابع لگاریتمی با ضابطهٔ $y=\log_a x$ نیز a همواره عددی مثبت و مخالف ۱ است همچنین مقادیر تابع نمایی همواره مثبت است بنابراین مقدار x نیز در $\log_a x$ همواره مثبت است.

کار در کلاس ۲

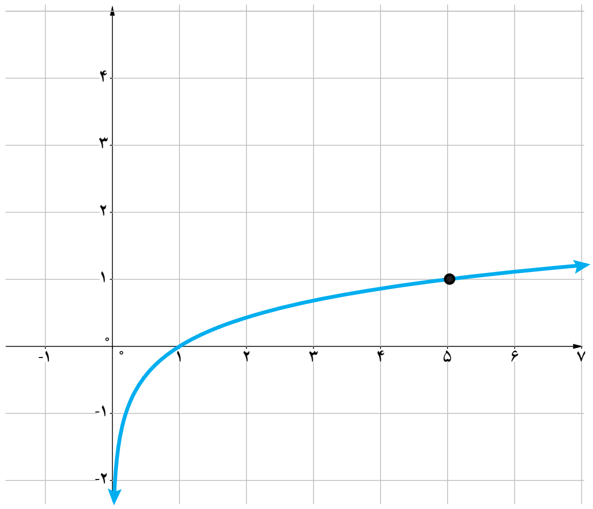
در شکل‌های زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $f(x)=۴^x$ و $f(x)=۵^x$ و وارون آنها رسم شده است. نمودار هر کدام از این توابع و وارون آنها را مشخص کنید و ضابطهٔ توابع وارون آنها را بنویسید.



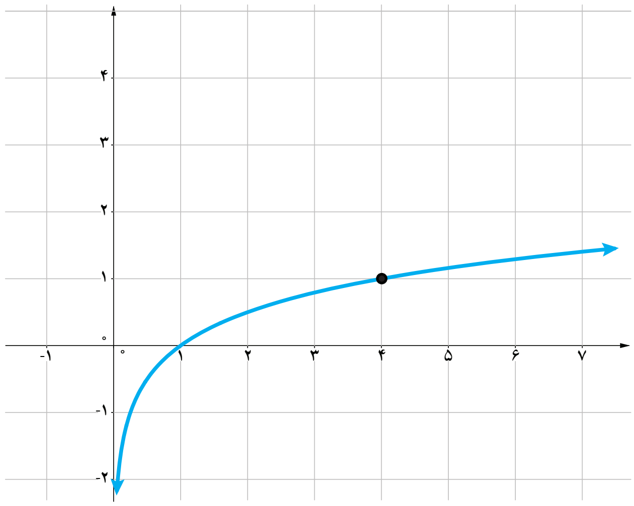
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

0019

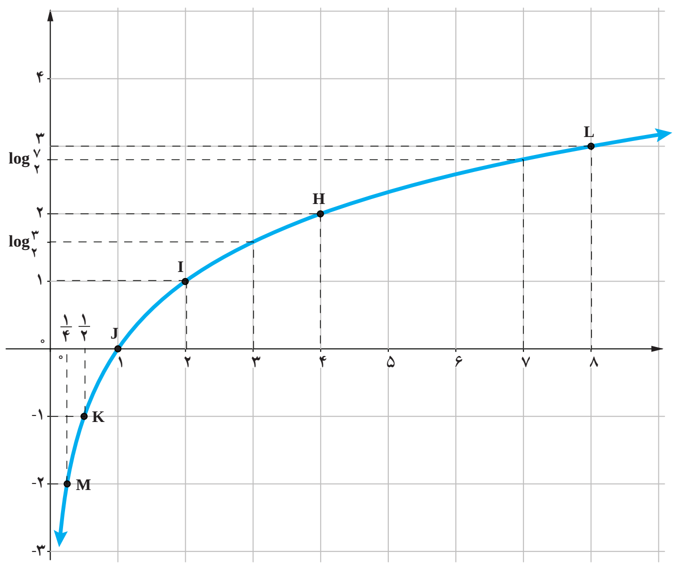
0029

لگاریتم یک عدد

فعالیت کلاسی ۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_۲ x$ را در نظر بگیرید :

0020



نمودار (۳)

۱ با توجه به نقاط مشخص شده روی نمودار (۳) جاهای خالی را پر کنید.

۱) $\log_۲ \frac{۱}{۴} = -۲$ ۲) $\log_۲ (\frac{۱}{۲}) =$ …… ۵) $\log_۲ ۸ =$ ……

۳) $\log_۲$ …… $= ۰$ ۴) $\log_{……} ۴ = ۲$

۲ با توجه به نمودار $\log_۲ ۳$ بین کدام دو عدد است؟ ....

۳ $\log_۲ ۷$ بین کدام دو عدد است؟ به کدام یک نزدیک تر است؟ ....

۴ مفهوم تساوی $\log_۲ (\frac{۱}{۴}) = -۲$ چیست؟ ....

«۲ به توان ۲− برسد، عدد $\frac{۱}{۴}$ به‌دست می‌آید». حال بگویید حاصل $\log_۲ ۱۶$ را چطور می‌توانیم به‌دست آوریم؟

« می‌گوییم ۲ به توان چه عددی برسد و عدد .... به‌دست آید. این عدد برابر است با ....

بنابراین = $\log_۲ ۱۶$.

جملات فوق را به زبان ریاضی می‌نویسیم :

$\log_۲ ۱۶ = m \rightarrow ۲^m = ۱۶$

۵ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

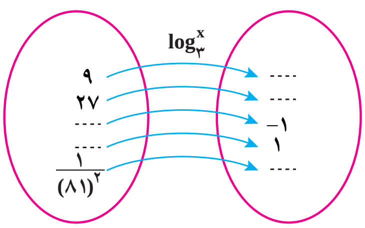
۱) $\log_۲ \frac{۱}{۸} =$ ....

۲) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶ =$ ....

۳) $\log_۳ ۸۱ =$ ....

۴) $\log_۴ ۶۴ =$ ....

۵) $\log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵ =$ ....



نمودار (۴)

۶ جاهای خالی را تکمیل نمایید.

> به‌طور کلی اگر $a^y=x$ آن‌گاه $\log_a x = y$ و به عکس.

کار در کلاس ۳

جدول روبه‌رو را تکمیل نمایید.

$\log_۸ ۱ = ۰ \rightarrow ۸^۰ = ۱$	$۱۰^۳ = ۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$
$\log_۲ (\frac{۱}{۱۶}) = -۴ \rightarrow ۲^{-۴} =$	$۹^{\frac{۱}{۲}} = ۳ \rightarrow \log_۹ ۳ =$ ......
$\log_۵ ۱۲۵ = ۳ \rightarrow ۵^۳ =$	$۴^۳ = ۶۴ \rightarrow \log_۴ ۶۴ =$ ....
$\log_{\frac{۱}{۳}} ۲۷ = -۳ \rightarrow$ .... = ...	$۲^۵ = ۳۲ \rightarrow$ .... = ...

کار در کلاس ۴

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۳}x$ را با استفاده از جدول (۱) رسم کنید.

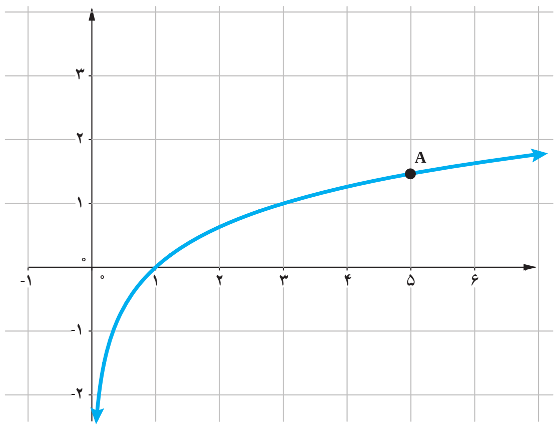
x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$f(x)=\log_{۳}x$	-۲	....	....	۱	....

$$x=\frac{۱}{۹}:\ \ y=\log_{۳}(\frac{۱}{۹})\ \rightarrow ۳^{y}=\frac{۱}{۹}\rightarrow ۳^{y}=۳^{-۲}\ \rightarrow\ y=-۲$$

$$x=۳:\ \ y=\log_{۳}۳\ \rightarrow ۳^{y}=۳\rightarrow ۳^{y}=۳^{۱}\ \rightarrow\ y=۱$$

۲ دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید. ....

۳ مقدار تقریبی $\log_{۳}۵$ را به‌دست آورید.



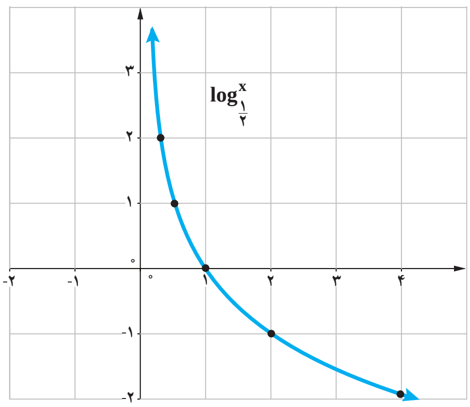
کار در کلاس ۴

۱ نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ را در نظر بگیرید.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
$y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$	۲	۱	۰	-۱	-۲

۲ دامنه و برد این تابع را با توجه به نمودار آن به‌دست آورید. ....

۳ مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.



۱ـ $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}) \sim$

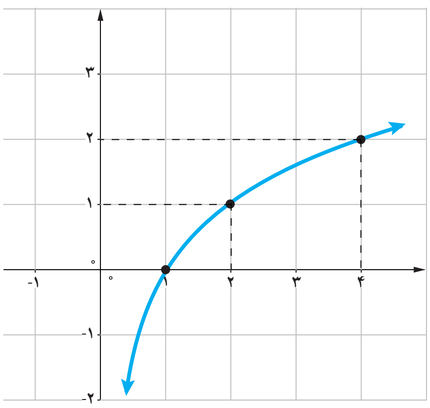
۲ـ $\log_{0/5}(3/5) \sim$

۳ـ $\log_{\frac{1}{2}}(6) \sim$

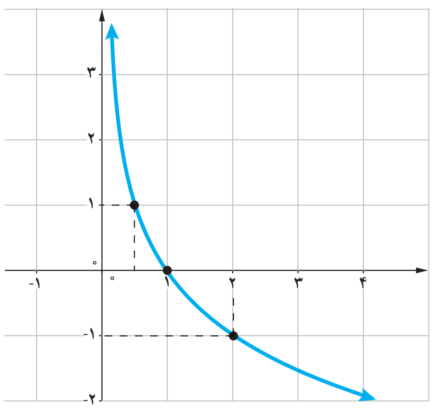
کار در کلاس ۵

نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.

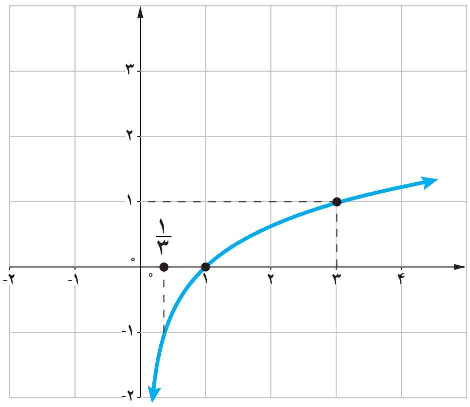
ب)



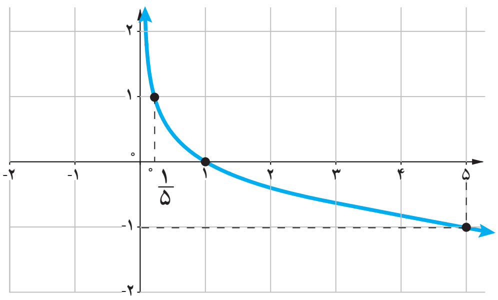
الف)



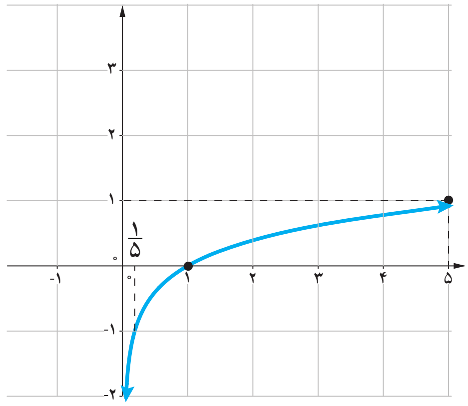
ت)



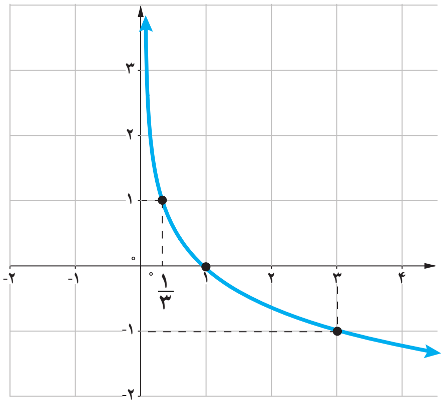
پ)



ج)



ث)



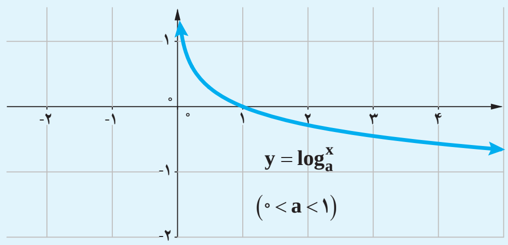
تذکر

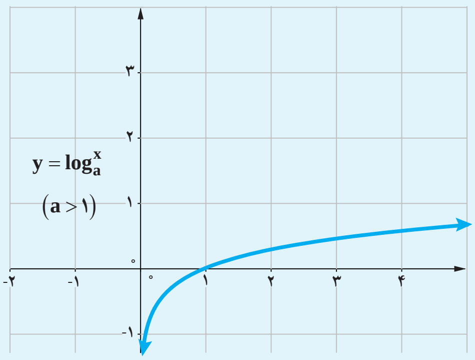
اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد داریم : $a^0=1$ بنابراین همواره :

$$\log_a 1 = 0$$

یعنی تمام نمودارهای لگاریتمی از نقطهٔ (۰ و ۱) عبور می‌کنند.

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی به صورت زیر هستند :





فعالیت کلاسی ۳

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a > 1)$، اعداد حقیقی مثبت و برد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$، بازه .... و برد آن .... است.

۳ نمودار دو تابع قسمت ۱ و ۲ محور xها را در نقطهٔ .... قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، ۱−۱ .... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را .... قطع می‌کند.

۵ وارون تابع نمایی، تابع .... است و وارون تابع لگاریتمی، تابع .... است.

p 0037

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود یعنی به جای $\log_{10} 9$ می‌نویسیم $\log a$.

p 0039

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

p 0038

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت کلاسی ۴

۱ اگر $a>0$ و $a\neq 1$ همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq 1)$ داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات:

$$\log_c a = m \;,\; \log_c b = n \rightarrow c^m = \ldots\ldots \;,\; c^n = \ldots\ldots \rightarrow c^m \times c^n = c^{\cdots} = \ldots\ldots$$

از طرفی $\log_c ab = t \rightarrow c^{\cdots} = ab \rightarrow c^t = c^{m+n} \; t = m+n \rightarrow \ldots\ldots \log_c a + \ldots\ldots$

مثال:

$$\log_{10} 100 = \log_{10}(4 \times 25) = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$$

۳ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq 1)$ داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) + \log_c b \;\underset{=\!=}{\overset{\text{طبق ۲}}{}}\; \log_c \left(\frac{a}{b}\right) \times b = \log_c a$$

$$\rightarrow \log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log_{10} 2 \approx 0/3$، مقدار $\log_{10} 5$ را محاسبه کنید. می‌دانیم $\log_{10} 10 = 1$ و نیز $\log_{10} 10 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 2 + \log_{10} 5$. بنابراین:

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = 1 \rightarrow \log_{10} 5 \approx 1 - 0/3 = 0/7$$

۴ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \cdots b}^{\text{n بار}} = \underbrace{\log_a b + \ldots + \log_a b}_{\text{n بار}} = n \log_a b$$

کار در کلاس ۶

اگر $\log ۲ \approx ۰/۳$ و $\log ۳ \approx ۰/۳$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲ = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۲) $\log ۰/۷۵ = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۳) $\log \sqrt{۵} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۴) $\log \frac{۲۵}{۱۸} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۵) $\log \sqrt[۳]{۶} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۶) $\log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلاتی که شامل لگاریتم است می‌توانیم از ویژگی‌های لگاریتم و یا تبدیل آن به تساوی نمایی استفاده کنیم.

مثلاً برای حل معادلهٔ لگاریتمی $\log_۲ x = ۵$ می‌توان نوشت : $x = ۲^۵ = ۳۲$

کار در کلاس ۷

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_۵ x = ۳$

۲) $\log_۲ (۲x + ۱) = ۳$

۳) $\log_۳ ۲۴۳ = ۲x + ۱$

۴) $\log_۳ (x - ۱) = ۴$

ممکن است در حل معادلات لگاریتمی در طرفین تساوی لگاریتم داشته باشیم، مثلاً :

$$\log_۳ ۲x - ۱ = \log_۳ x$$

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اختر شناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است.»

به‌طور کلی داریم : اگر $a>۰$ و $a\neq ۱$، آن‌گاه از تساوی $\log_a x=\log_a y$ می‌توان تساوی $x=y$ را نتیجه گرفت و به عکس.

p 0044

فعالیت کلاسی ۵

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_۵(x+۶)=\log_۵(۲x-۳) \rightarrow x+۶=۲x-۳ \rightarrow x=۹$

که $x=۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۲) $\log_۵(x+۶)+\log_۵(x+۲)=۱ \rightarrow \log_۵[(x+۶)(x+۲)]=۱$

$\rightarrow (x+۶)(x+۲)=۵^۱=۵ \rightarrow x^۲+۸x+۱۲=۵$

$\rightarrow x^۲+۸x+۷=۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱)=۰ \rightarrow \underset{\text{غ ق ق}}{x=-۷}$ یا $\underset{\text{ق ق}}{x=-۱}$

۳) $\log_۴(x+۲)=\log_۴ ۸ \rightarrow x+۲=۸ \rightarrow x=\cdots$

۴) $۳\log_۲ x=-\log_۲ ۲۷ \rightarrow \log_۲ x^۳=\log_۲(۲۷)^{\cdots} \rightarrow \cdots\cdots=\cdots\cdots$

۵) $\log x+\log(x+۱۵)=۲ \rightarrow \log[x(x+۵)]=\log\cdots\cdots \rightarrow \cdots\cdots$

p 0045

کار در کلاس ۸

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱$

۲) $\log_۳(x+۱)+\log_۳(x+۴)=۲$

تمرین‌های درس دوم

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d \quad (a,b,c,d \in IR^+, c \neq ۱)$

ب) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \quad (a,b,c \in IR^+, b,c \neq ۱)$

پ) $a^{\log_a b} = b \quad (a,b \in IR^+, a \neq ۱)$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۷ \sqrt[۵]{۴۹}$ ب) $\log_۳ ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$

۳ اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_۴(\dfrac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به‌دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(۲, ۲)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(-۴, \frac{۱}{۲})$عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x \; (۰ < a < ۱)$ از نقطهٔ $(۱, ۰)$ عبور می‌کند.

۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۵(p^۲ - ۲) = \log_۵ p$ ب) $\log_۳(x^۲ - ۱۵) = \log_۳ ۲x$

پ) $\log_{۱۴}(m^۲ - ۳۰) - \log_{۱۴} m = ۰$ ت) $\log_۲(۱۲b - ۲۱) - \log_۲(b^۲ - ۳) = ۲$

ث) $\log_۲(۱۲b - ۲۱) - \log_۲(b^۲ - ۳) = ۲$

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. با استفاده از انتقال نیز می‌توان نمودار برخی از توابع نمایی و لگاریتمی را رسم کرد.

۱ــ انتقال عرضی و طولی

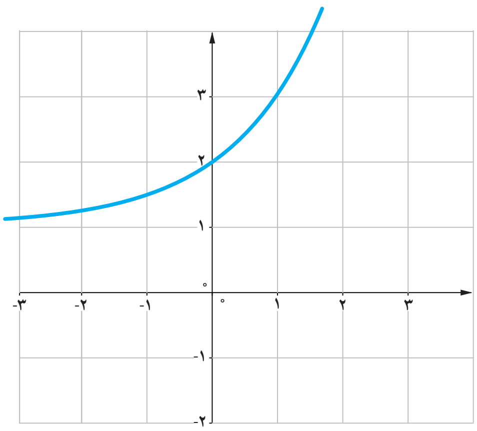
در سال دهم، انتقال نمودار توابع را در راستای محور عرض‌ها و طول‌ها فرا گرفتیم که با استفاده از آن می‌توانیم فعالیت زیر را انجام دهیم.

فعالیت کلاسی ۱

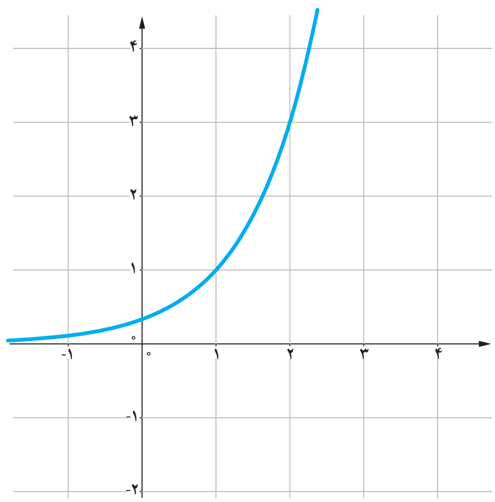
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $f(x)=2^x+1$ ب) $g(x)=\log(x-1)$

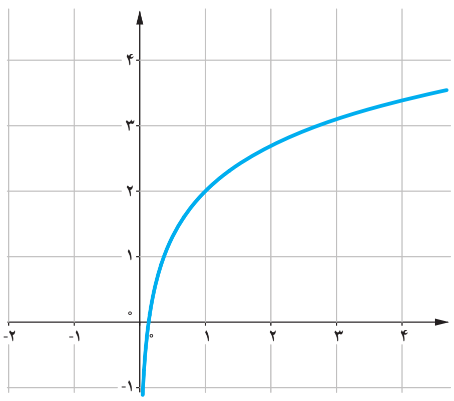
پ) $h(x)=2+\log x$ ت) $i(x)=3^{x-1}$



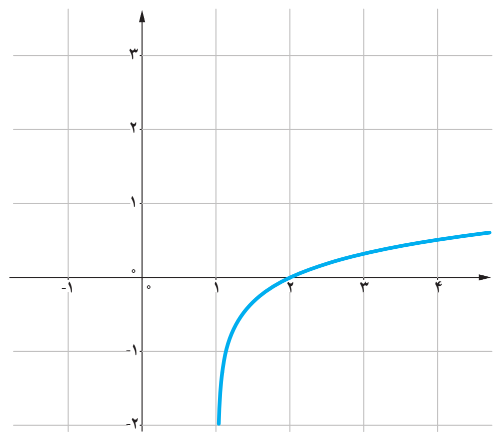
(۱)



(۲)



(۳)



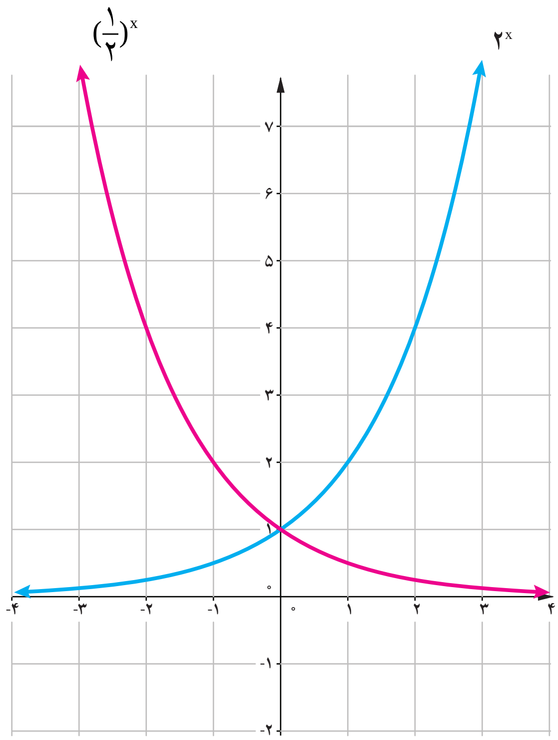
(۴)

۲ــ بازتاب نسبت به محور yها

فعالیت کلاسی ۲

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = ۲^x$ و $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه هستند؟......................



۳ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$ به تابع با ضابطهٔ ...... = y یا همان ......=y دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ ....

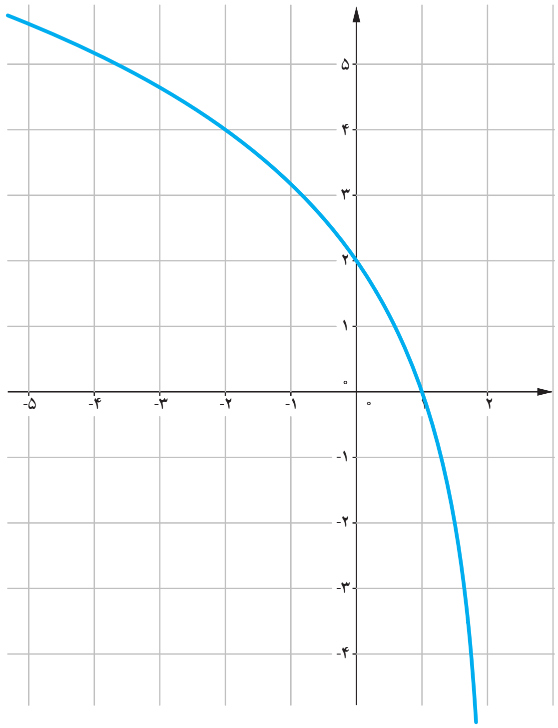
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه هستند مثال بزنید.................

....

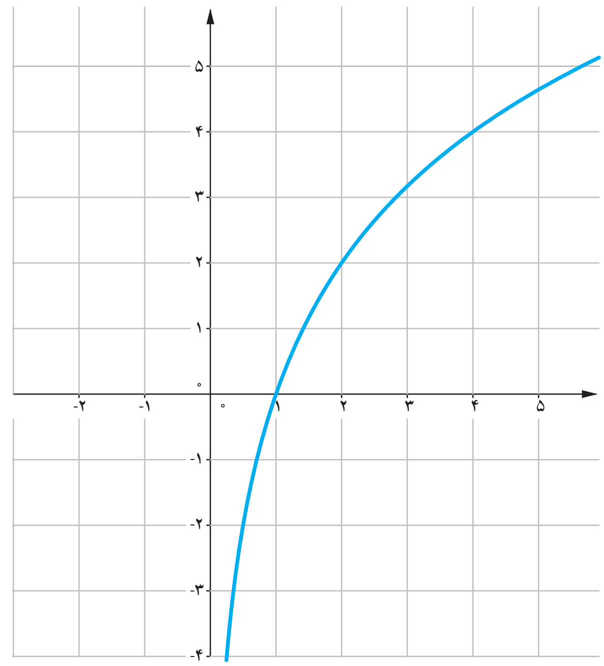
نمودار توابع با ضابطهٔ $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ $(a > ۰)$ نسبت به محور yها قرینه هستند.
آیا در مورد توابع لگاریتمی نیز چنین است؟

کار در کلاس ۱

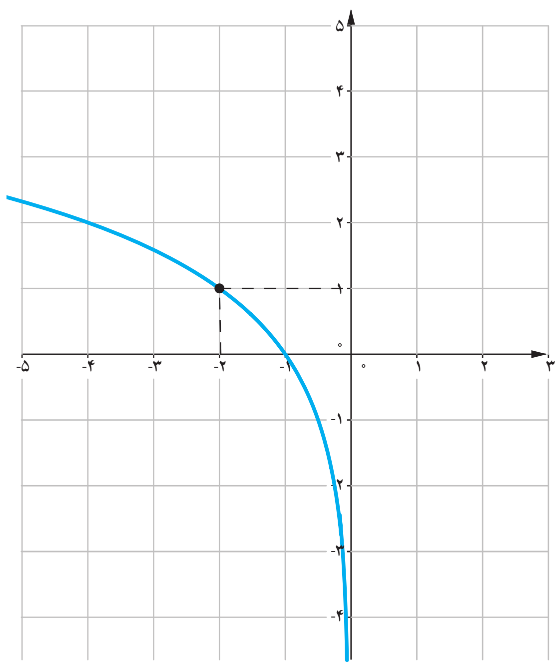
کدام یک از نمودارهای زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_2(-x)$ است؟ دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. ....



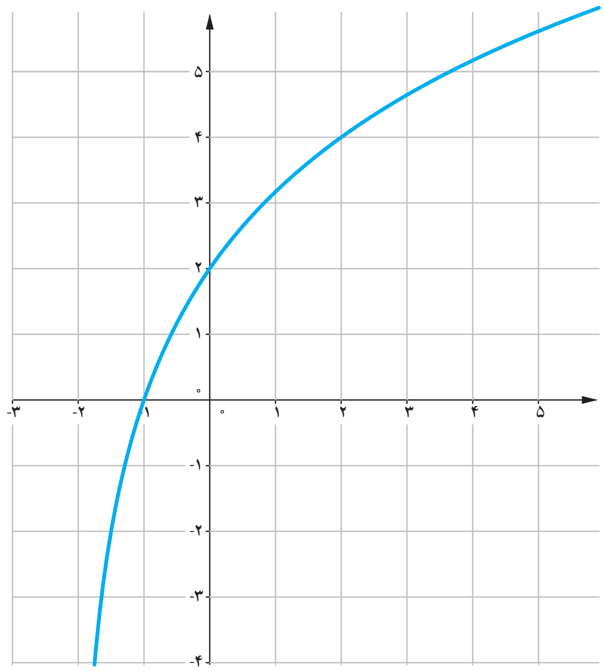
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۳ــ بازتاب نسبت به محور xها

فعالیت کلاسی ۳

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ را با استفاده از نقاط جدول زیر رسم کرده‌ایم.

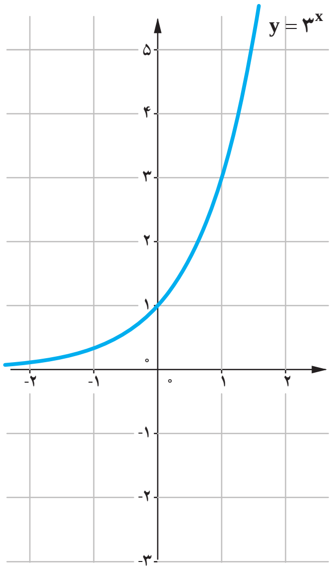
الف) عرض نقاط را قرینه کنید و نمودار جدیدی رسم کنید.

ب) ضابطهٔ تابع جدید را حدس بزنید.

....

پ) نمودار این دو تابع نسبت به محور .... ها قرینه هستند.

x	−۲	−۱	۰	۱
$y=۳^x$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳
y=				

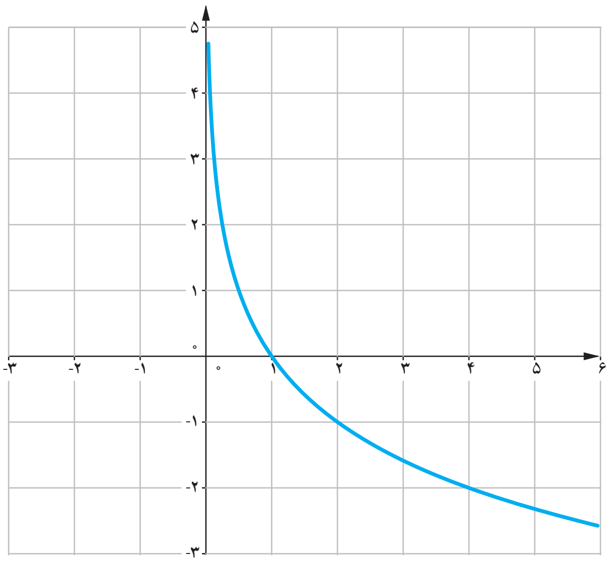


ت) دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

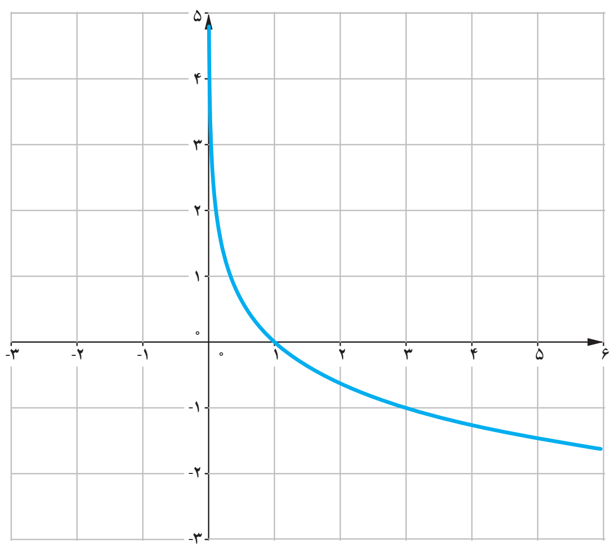
نمودار توابع با ضابطهٔ $y= a^x$ و $y= -a^x$ $(a>۰)$ نسبت به محور xها قرینه هستند. توابع با ضابطه‌های $y = \log_a x$ و $y = -\log_a x$ نیز نسبت به محور طول‌ها قرینه هستند.

کار در کلاس ۲

کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع با ضابطهٔ $y = -\log_a x$ است؟



(الف)



(ب)

کار در کلاس ۳

مشخص کنید کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_3 (x - 1)$

۲) $y = -\log_3(-x)$

۳) $y = 3^x + 1$

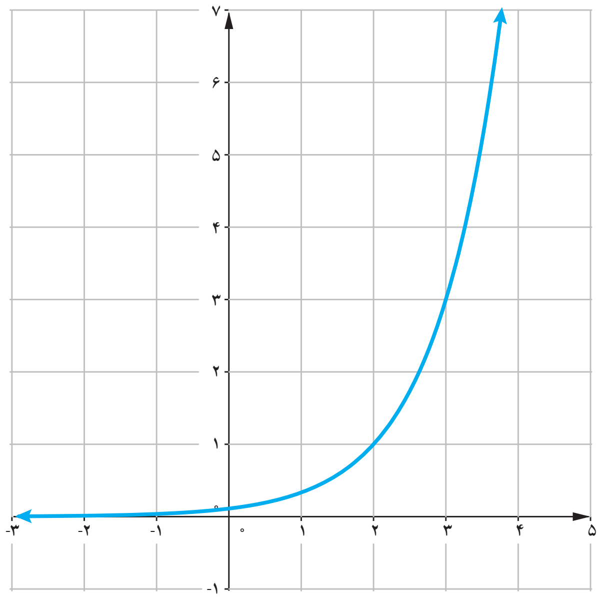
۴) $y = 1 - 3^x$

۵) $y = \log_3 x - 1$

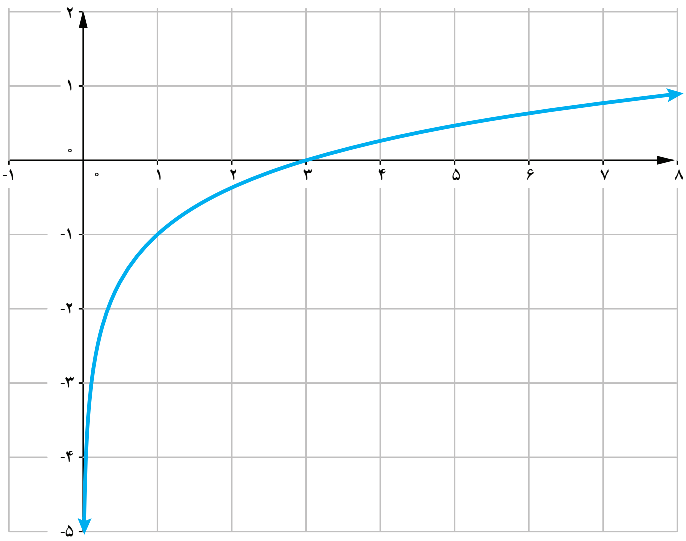
۶) $y = 1 - \log_3 x$

۷) $y = -3^{-x}$

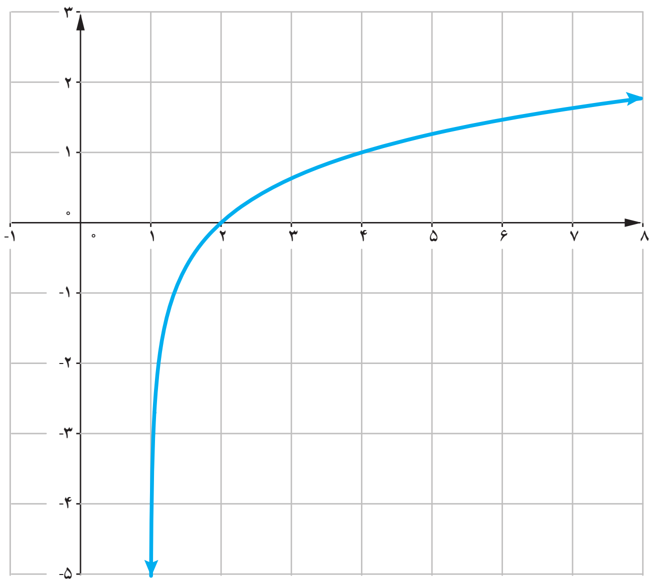
۸) $y = 3^{x-2}$



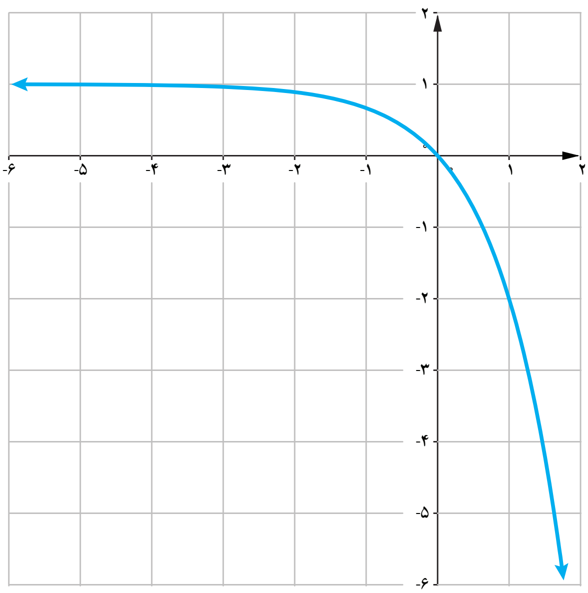
(ب)



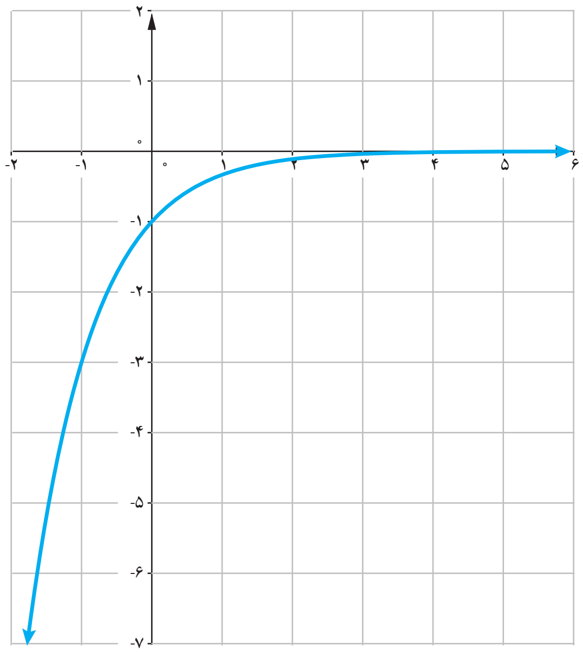
(الف)



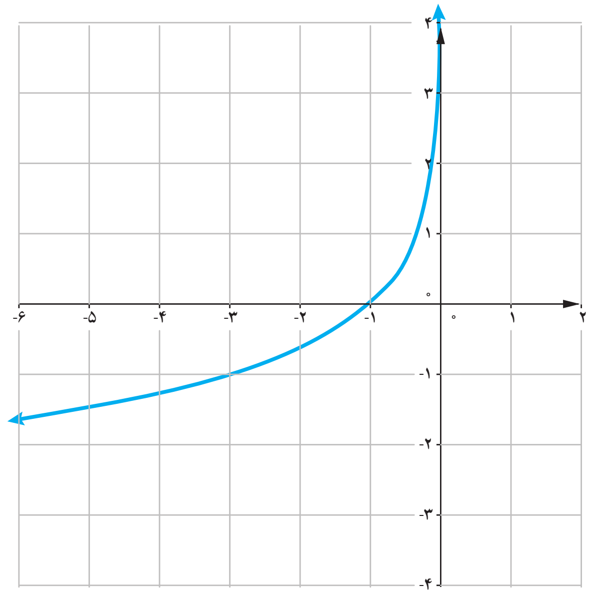
(ت)



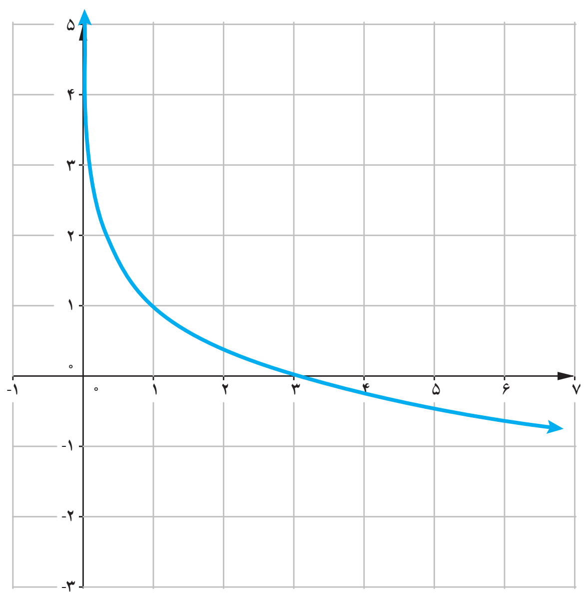
(پ)


-۲ -۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶
۲ ۱ -۱ -۲ -۳ -۴ -۵ -۶ -۷

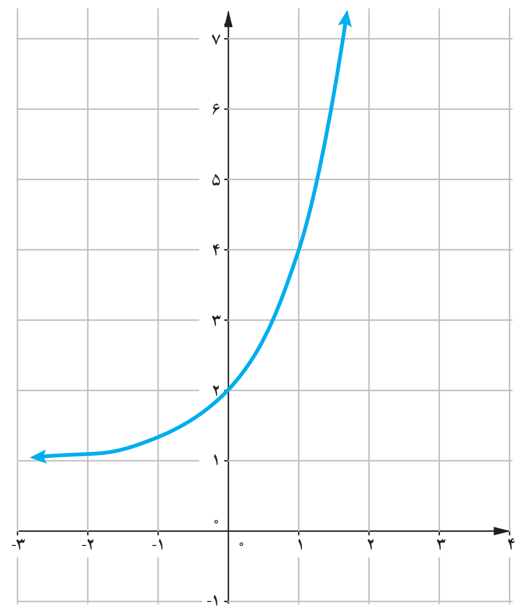
(ث)


-۶ -۵ -۴ -۳ -۲ -۱ ۰ ۱ ۲
۴ ۳ ۲ ۱ -۱ -۲ -۳ -۴

(ج)


-۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷
۵ ۴ ۳ ۲ ۱ -۱ -۲ -۳

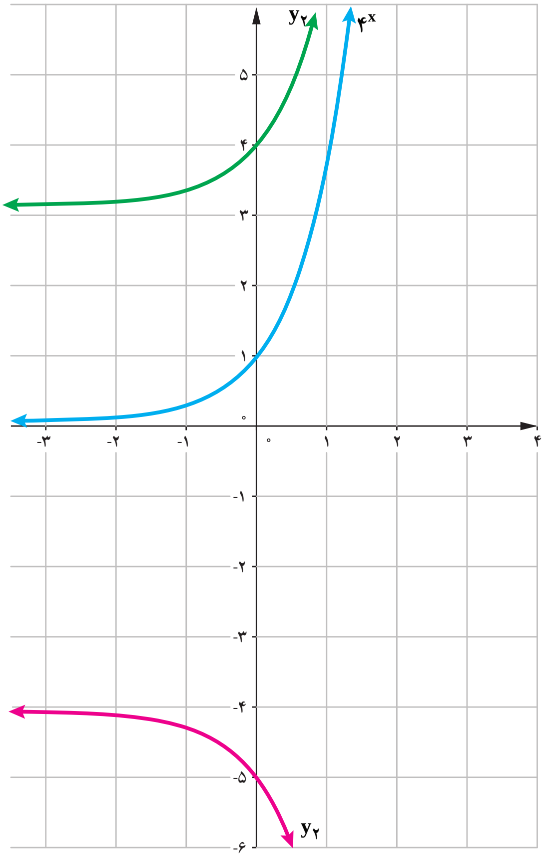
(چ)

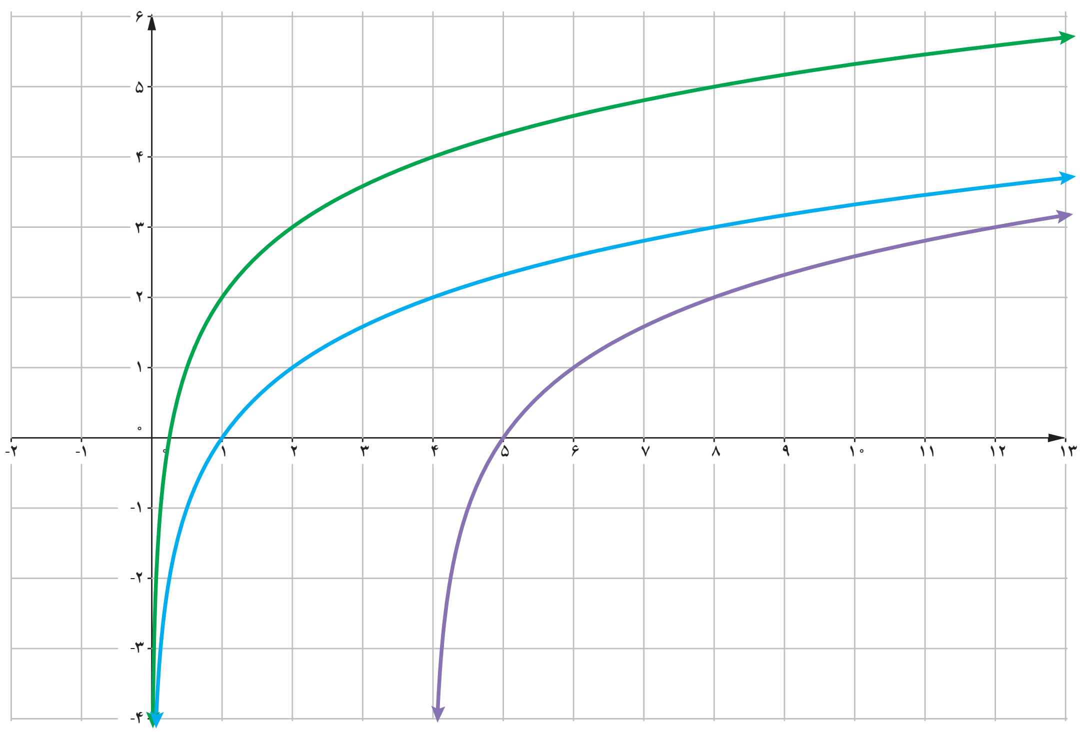

-۳ -۲ -۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ -۱

(ح)

کار در کلاس ۴

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





p 0055

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. در اثر این زلزله، ۹۰ درصد از سازه‌های شهر بم به‌کلی تخریب شدند و ارگ بم که بزرگ‌ترین سازهٔ گلی جهان با ۲۵۰۰ سال قدمت بود، به‌کلی نابود شد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مصیبت‌بار چه‌قدر بوده است؟

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \rightarrow$

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,(۶/۶)$

$\rightarrow \log E = ۲۱/۷ \;\rightarrow\; E = ۱۰^{۲۱/۷}\ \mathrm{Erg}$

p 0056

کار در کلاس ۵

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد رخ داد و بیش از ۳۵۰۰۰ کشته و ۶۰۰۰۰ زخمی به جای گذاشت. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مرگبار را محاسبه کنید.

....

....

....

....

یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبهٔ PH یک محلول است. PH، معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$PH = -\log_{۱۰}{}^{[H^+]} \quad PH = -\log_{۱۰}[H^+]$$

که $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را برحسب واحد mol/lit نشان می‌دهد.

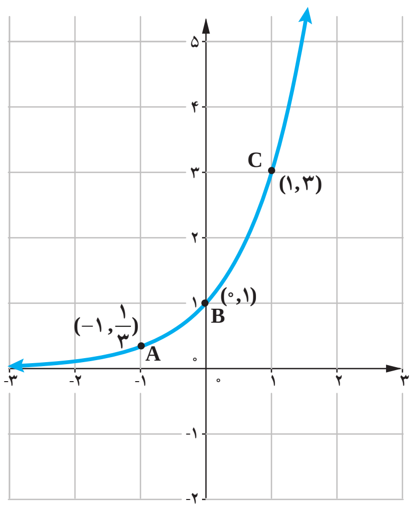
کار در کلاس ۶

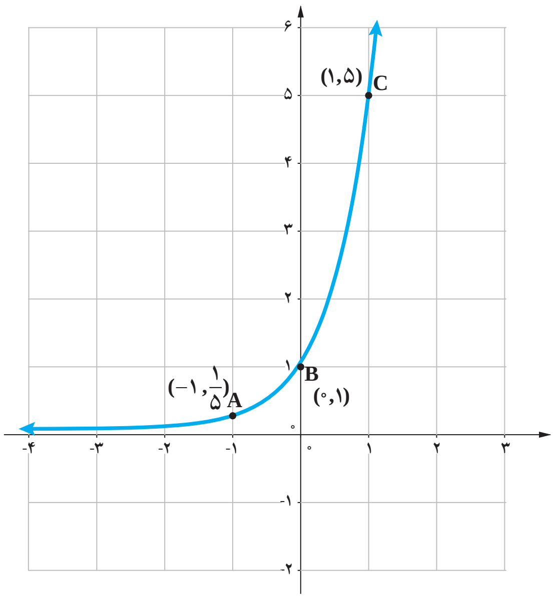
PH محلولی چقدر است اگر $[H^+]$ برابر ۰/۱ باشد؟

اگر $[H^+]$ برابر ۰/۰۱ باشد PH چقدر می شود؟

تمرینهای درس سوم

۱ ضابطهٔ توابع نمایی که نمودار آنها رسم شده است را به‌دست آورید.





۲ فرض می کنیم $g(x) = ۴^x + ۲$.

الف) $g(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $g(x) = ۶۶$، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x - ۱$ را در بازهٔ $[-۲, ۲]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -۲^{-x} + ۱$ ب) $y = -\log_۱(x-۱)$

۵ در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم برابر $۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$ مول بر لیتر است. PH آب پرتقال چقدر است؟ ($\log ۲۹ = ۱/۴۶$)

۶ در محلول خنثی، PH برابر ۷ می‌باشد. مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی چند مول بر لیتر است؟

فصل ۶

حد و پیوستگی

درس اوّل — فرایندهای حدی

درس دوم — محاسبه حد توابع

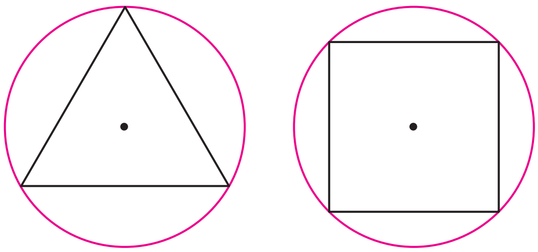
درس سوم — پیوستگی

درس اوّل

فرایندهای حدی

فعالیت کلاسی ۱

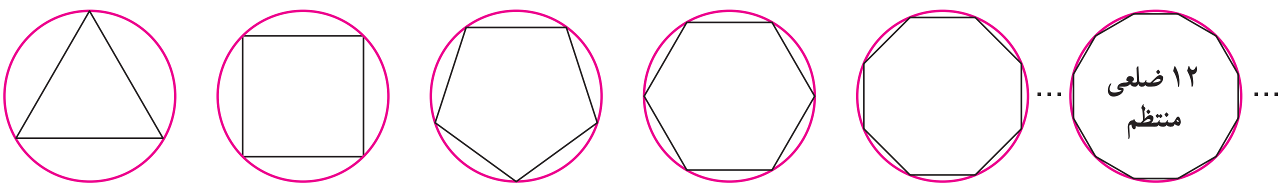
در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع است. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.



حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ با افزایش تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی در داخل دایره چه اتفاقی می‌افتد؟

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی در داخل دایره‌ای به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده‌اند. برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه کاری می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟

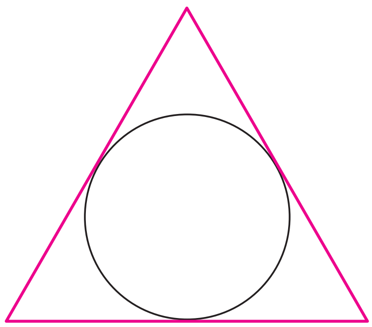
زیاد شدن تعداد اضلاع →	۱۲	…	۷	۶	۵	۴	۳	چند ضلعی منتظم محاطی
نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت … →	۳$r^۲$	…	۲/۸$r^۲$	۲/۶$r^۲$	۲/۳۸$r^۲$	۲$r^۲$	۱/۳$r^۲$	مساحت تقریبی

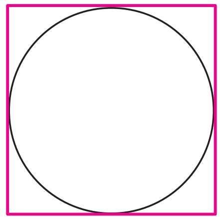


مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

کار در کلاس

فرض کنید که در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همه اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه که در فعالیت قبل به‌دست آمد را در مورد این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).

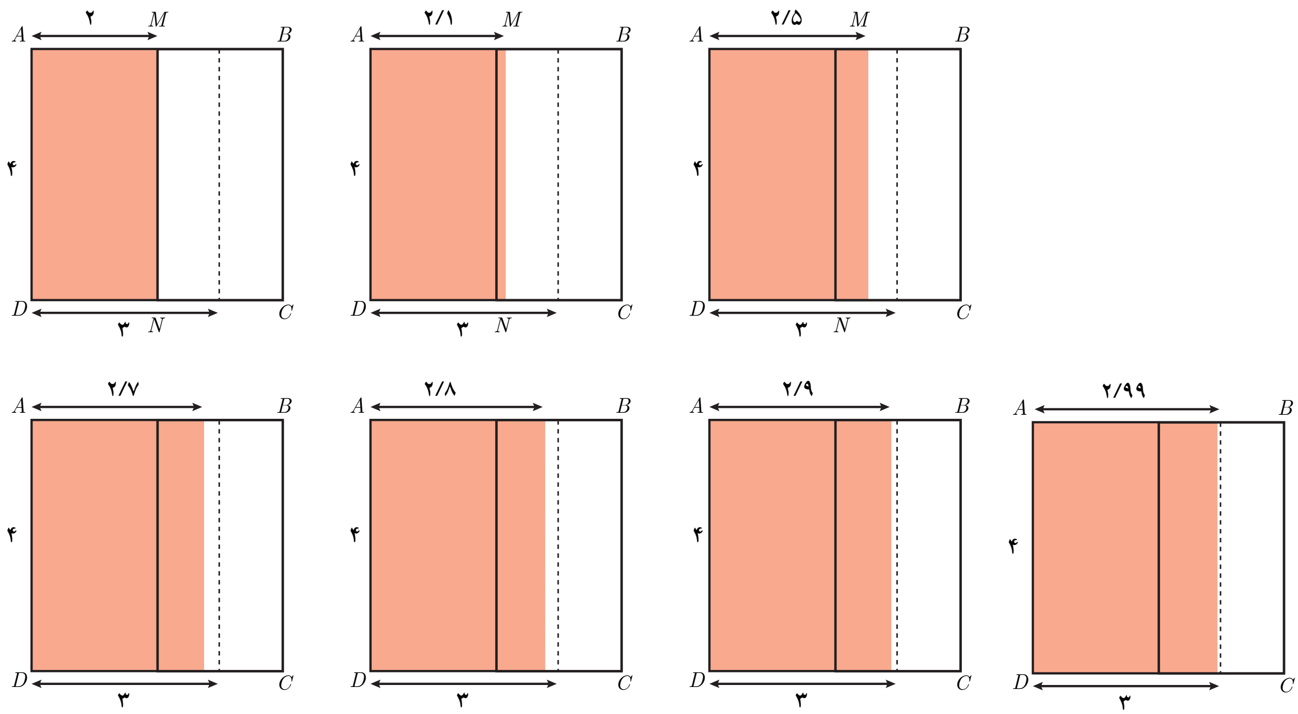




فعالیت کلاسی ۲

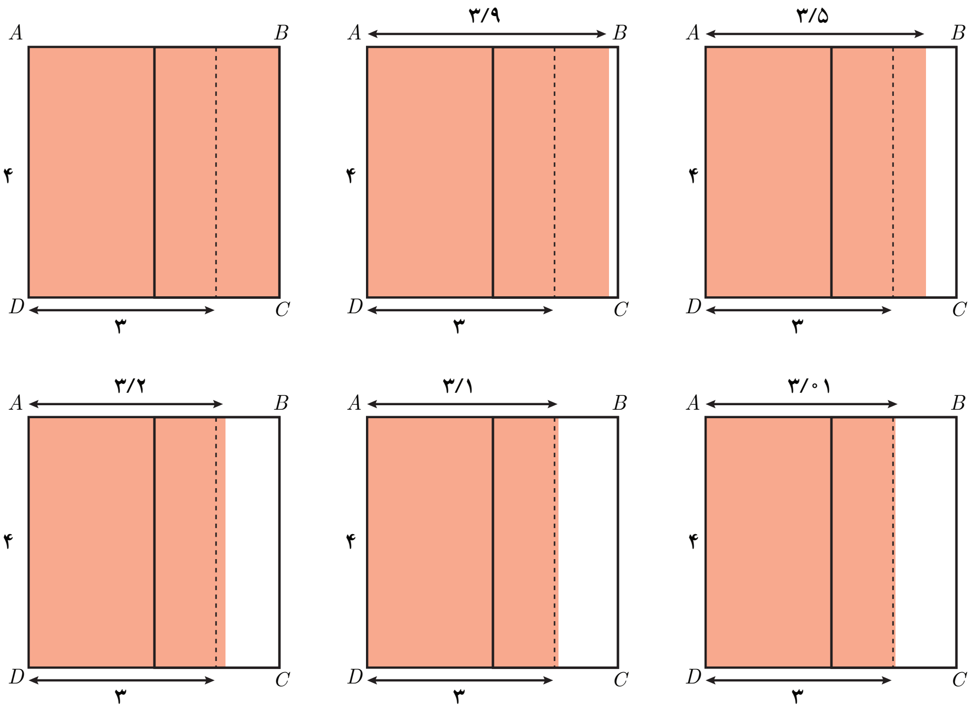
مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ به موازات MN پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ...... نزدیک می‌شود.			۱۱/۲			۸/۴	۸	مساحت مستطیل رنگی



مشابه همین کار را با شروع از پاره‌خط BC انجام می‌دهیم. پاره‌خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ...... نزدیک می‌شود.			۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	مساحت مستطیل رنگی



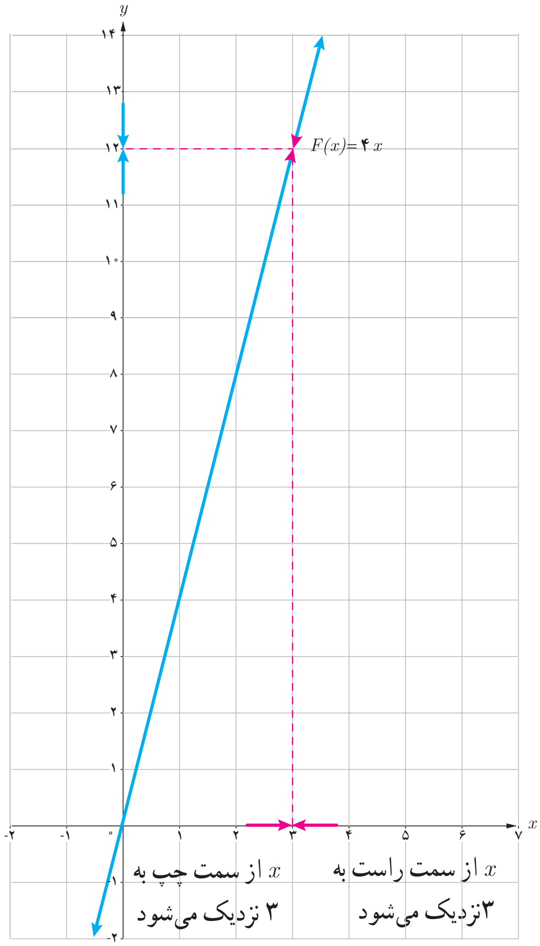
اگر طول مستطیل‌ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل‌ها را می‌توان به‌صورت تابع $f(x)=۴x$ نمایش داد. با این تفاوت که در حالت اول x با مقادیر کمتر از عدد ۳، به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود و در حالت دوم x با مقادیر بیشتر از عدد ۳ به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود. این دو وضعیت را به ترتیب با نمادهای $x\to ۳^-$ و $x\to ۳^+$ نمایش می‌دهیم. خلاصه دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود — x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۷	۲/۸	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴					→۱۲←						۱۶

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

وقتی $x \to ۳^+$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x \to ۳^-$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ ۳ مورد بررسی قرار گرفته است.



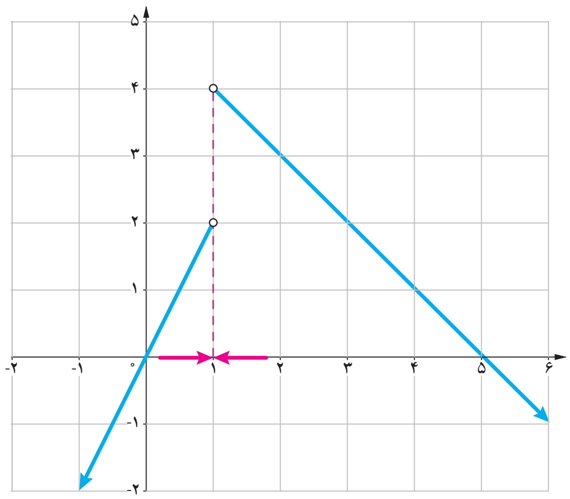
وقتی $x \to ۳^-$ ملاحظه شد که مساحت مستطیل‌ها یا همان مقادیر $f(x)$ به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شوند، در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(x) = ۱۲$

به طریق مشابه وقتی $x \to ۳^+$ باز هم مساحت مستطیل‌ها به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شوند. در این حالت هم می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to ۳^+} f(x) = ۱۲$

اگر هم حد راست و هم حد چپ یک تابع در یک نقطه موجود و برابر باشند، گوییم تابع در آن نقطه حد دارد. به‌طور نمونه در این فعالیت هم حد راست و هم حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود* موجود و برابر ۱۲ است. به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۲$$

مثال : نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x & x < ۱ \\ -x + ۵ & x > ۱ \end{cases}$ رسم شده است.



جدول صفحه بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

*ــ ممکن است گفته شود x به ۳ میل می‌کند.

x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود — x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۲	۰/۵	....	۰/۹	۰/۹۹	→۱←		....	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	....	۱/۶	۱/۸	....	→۲	۴←	۳/۹۹	۳/۹	....	۳/۵	۳/۲	....

$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود

به عبارت دیگر حد چپ تابع وقتی $x\to 1^-$ برابر ۲ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ و در حد راست تابع وقتی $x\to 1^+$ برابر ۴ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. در این مثال حد راست و حد چپ هر دو وجود دارند ولی باهم برابر نیستند. تابع در نقطه ۱ حد ندارد ولی حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ) وجود دارند.

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,\,x_0)$ تعریف شده باشد. گوییم حد چپ f در x_0 برابر عدد l است هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$
به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_0\,,\,b)$ تعریف شده باشد. گوییم حد راست f در x_0 برابر عدد l است هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه بازی مانند $(a$ و $b)$ شامل نقطه x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$.

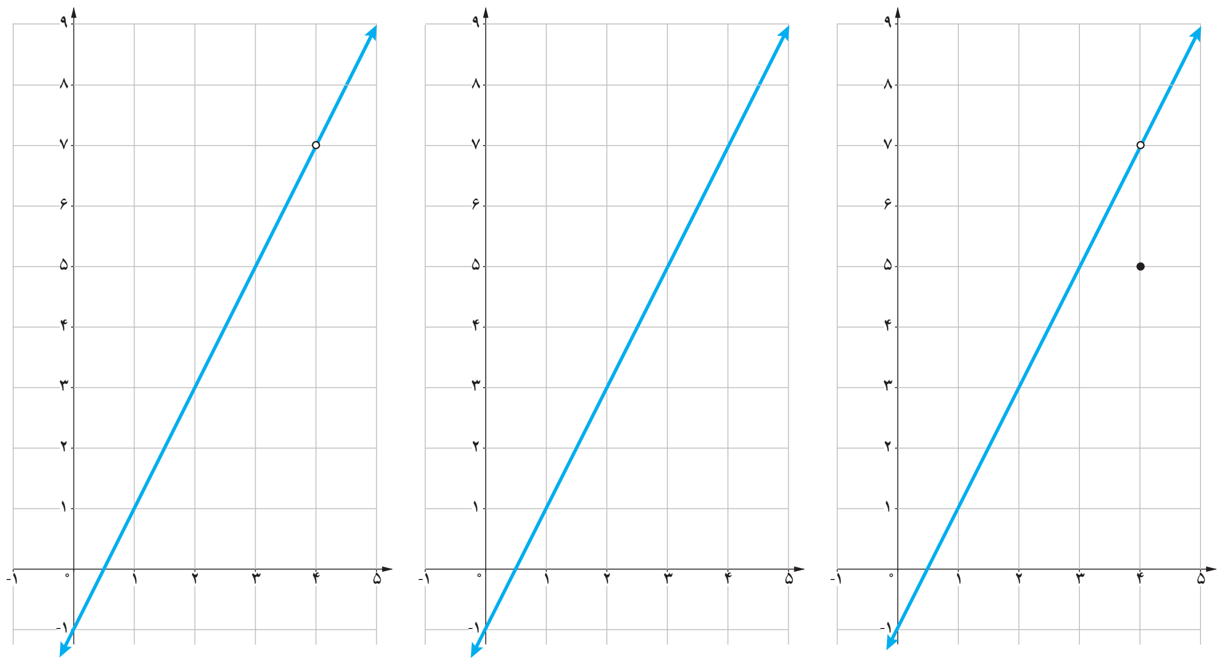
همان‌طور که می‌دانید بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل ارائه در قالب یک تابع هستند. در بسیاری از مواقع لازم است که رفتار یک تابع را در نزدیکی یک نقطه مورد بررسی قرار دهیم. در فعالیت زیر رفتار سه تابع را در نزدیکی یک نقطه مورد بررسی قرار می‌دهیم تا با مفهوم حد بهتر آشنا شویم.

فعالیت کلاسی ۳

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند:

$f(x)=۲x-۱$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\neq ۴\\ ۵ & x=۴\end{cases}$ $\qquad$ $h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

مشخص کنید که هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد. آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطه ۴ مورد بررسی قرار دهیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود $\qquad$ x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

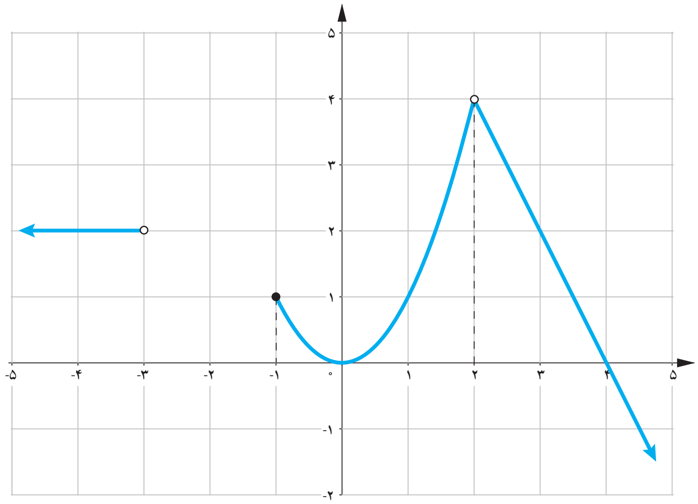
x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\to$ ۴ $\leftarrow$	۴/۰۱	۴/۰۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶			$\to$ ۷ $\leftarrow$			۷/۴	۸	۹
$g(x)$						$\to \quad \leftarrow$					
$h(x)$						$\to \quad \leftarrow$					

مقادیر $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به عدد ... نزدیک کنیم به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ... نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی که $x\to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ... است به عبارت دیگر:

$\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=$

توجه کنید برای اینکه حد یک تابع وقتی x به سمت نقطه‌ای خاص نزدیک می‌شود (میل می‌کند) موجود باشد لازم نیست که تابع حتماً در آن نقطه دارای مقدار باشد و یا اینکه حد تابع و مقدار تابع باهم برابر باشند. در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۴ باهم متفاوتند (حتی یکی از آنها در نقطه ۴ تعریف نشده است) ولی در نزدیکی نقطه ۴ رفتار کاملاً یکسانی دارند. به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ میل می‌کند برابر ۷ است، یا حد آنها در نقطه ۴ برابر ۷ است.

مثال : در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۸ & x>۲\\ x^{۲} & -۱\le x<۲\\ ۲ & x<-۳\end{cases}$ که نمودار آن رسم شده‌است گزاره‌های زیر را داریم :



$f(۲)$ تعریف نشده است ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

$\lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)=۱$ ولی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد. همچنین $f(-۱)=۱$

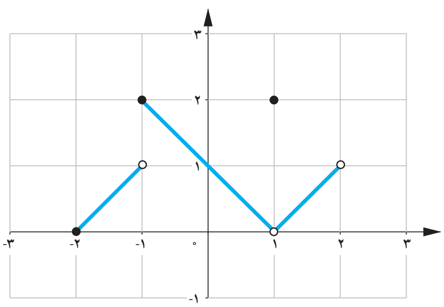
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ و $f(۰)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ و $f(۴)=۰$

$f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to -۳^{+}} f(x)$ وجود ندارند، ولی $\lim\limits_{x\to -۳^{-}} f(x)=۲$.

تمرین‌های درس اول

۱) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲^{+}} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

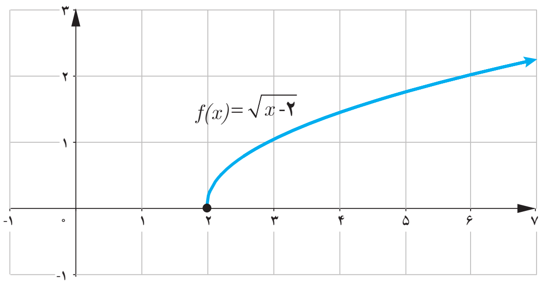
۲ مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه ۲ مساوی ۱− باشد.

۳ مثالی از یک تابع ارائه کنید که در نقطه ۳ حد نداشته باشد ولی $f(۳)=۱$.

۴ مثالی از یک تابع ارائه کنید که مقدار آن در نقطه ۲ تعریف نشده باشد ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$.

۵ در مورد تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ ت) $f(۲)$



۶ تابع $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(۰)$ موجود است؟

۷ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

$f(x)=۲x+۱$ $\quad g(x)=۲x+۱ \quad x\neq ۲$ $\quad h(x)=\begin{cases} x+۲ & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$

الف) مقادیر $f(۲)$ ، $h(۲)$ ، $g(۲)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید :

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)$

۸ آیا حد تابع زیر در $x=۲$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را بیابید.

۱۰ اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ نمودار f را رسم کنید و $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

درس دوم

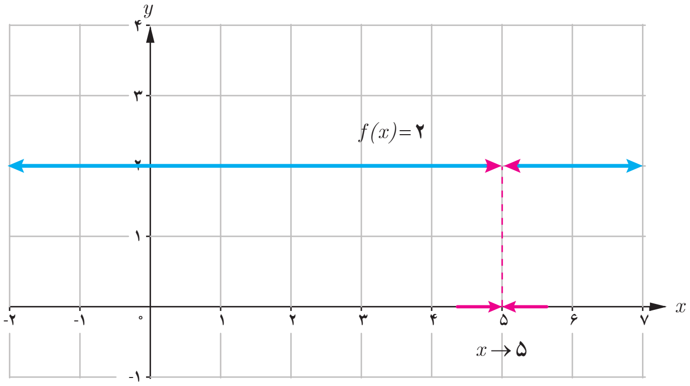
محاسبه حد توابع

یکی از عواملی که به مطالعه دقیق‌تر یک تابع می‌تواند کمک کند، محاسبه حد آن تابع است. برای محاسبه حد یک تابع معمولاً قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این کتاب این قواعد اثبات نمی‌شوند و سعی می‌شود به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده شوند.

۱ــ حد تابع ثابت

حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

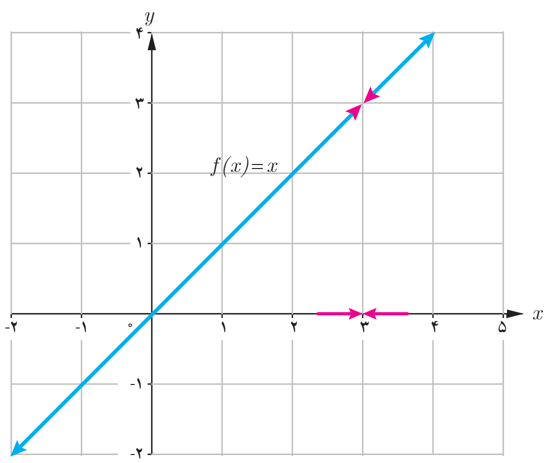
به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = ۲$



به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

۲ــ اگر $f(x)=x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$ ، $a\in\mathbb{R}$

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۳} x = ۳$



کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x =$ .... $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} ۵ =$ .... $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} x =$ ....

$\lim\limits_{x\to -۷} x =$ .... $\qquad \lim\limits_{x\to ۴} (-۲) =$ .... $\qquad \lim\limits_{x\to ۵} ۰ =$ ....

تاکنون بیشتر از جدول‌ها و نمودارها برای محاسبه حد یک تابع بهره بردیم. در اینجا به کمک چند قانون، حد توابع را محاسبه می‌کنیم.

۳ــ قانون حد مجموع دو تابع

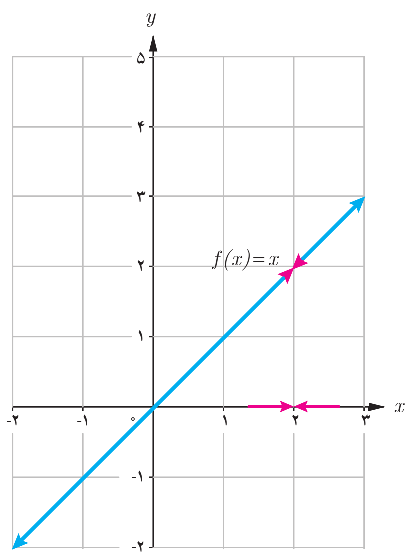
اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ آنگاه :

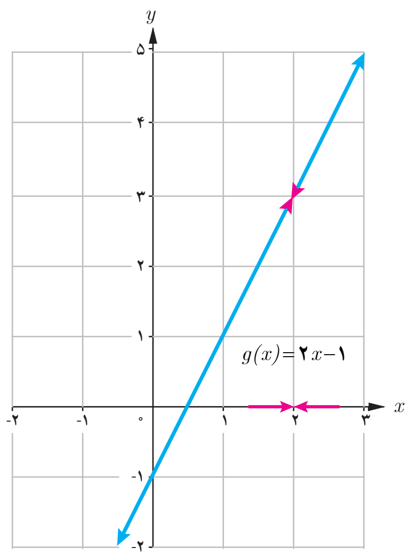
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l+m$$

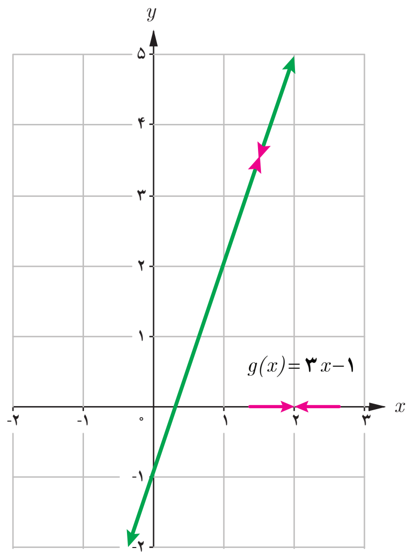
به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها هم قانون حد مجموع را توضیح دهید.







$\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x)) =$ ......+ ...... $\qquad \lim\limits_{x\to ۲} g(x) =$ .... $\qquad \lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ ....

۴ـ قانون حد تفاضل

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

به‌طور مثال در کار در کلاس قبل داریم :

$$\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to ۲} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۲-۳=-۱$$

۵ـ

اگر c یک عدد ثابت و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ آنگاه

$$\lim\limits_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim\limits_{x\to a} f(x) \quad (a\in\mathbb{R})$$

کار در کلاس

برای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

۶ـ قانون حد حاصلضرب

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصلضرب دو تابع در آن نقطه برابر .... آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصلضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^۲=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).f(x)\right)$$

$$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^۳=.........$$

۸ــ

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n=l^n$$

۹ــ قانون تقسیم حدها

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ که $m\neq ۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{m}\qquad (m\neq ۰)$$

فعالیت کلاسی ۱

۱ اگر $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$
$$=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲)+\lim_{x\to ۱}(۲x)-\lim_{x\to ۱}۷$$
$$=۳\lim_{x\to ۱}x^۲+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ را بررسی کنید.

ج) در مورد تابع $g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$ نیز درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوبست $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}}=\cdots\cdots\cdots$$

به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبه حد $f(x)$ در یک نقطه کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم به شرط آنکه $\lim_{x\to a}Q(x)\neq ۰$

اگر در محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=۰$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد در این موارد به روش زیر عمل می‌کنیم :

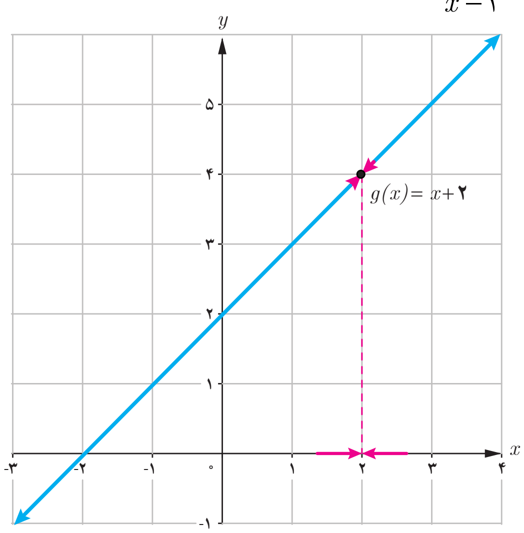
چون $P(a)=Q(a)=۰$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر هستند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

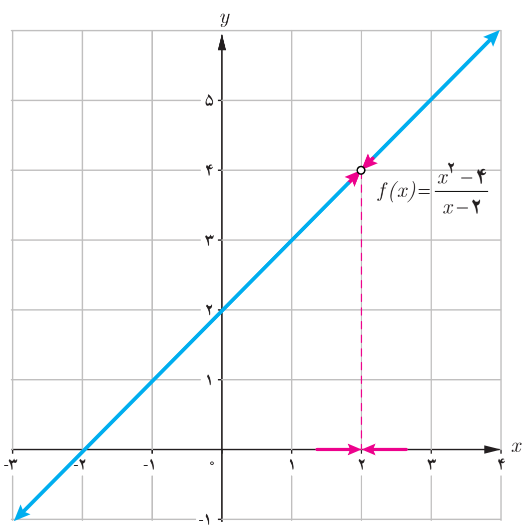
مثال : $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ را محاسبه کنید.

داریم : $\lim_{x\to ۲}(x-۲)=\lim_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۰$ ،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

توجه داریم که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $x\neq ۲$ پس $x-۲\neq ۰$ و صورت و مخرج کسر را می‌توانیم بر $x-۲$ تقسیم کنیم. در نمودارهای زیر توابع $\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ و $x+۲$ رسم و حد آنها در $x=۲$ نمایش داده شده است.





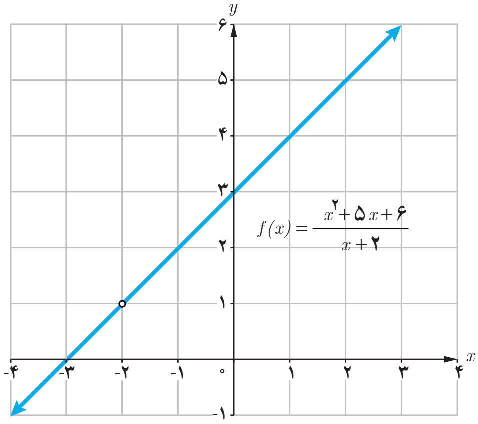
دو تابع g و f برابر نیستند (چرا؟) ولی حد آنها در $x=۲$ برابر است.

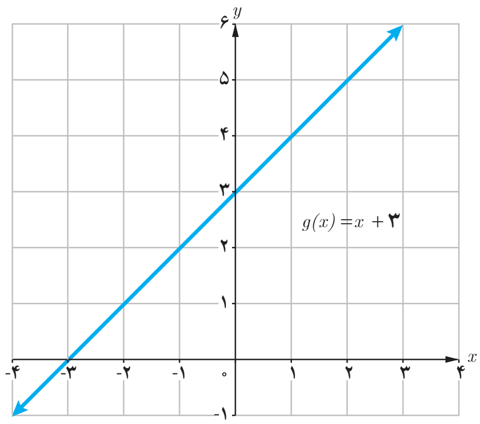
کار در کلاس

در هر حالت مانند مثال داده شده حدهای داده شده را به‌دست آورید و به کمک نمودارهای داده شده نیز حد را توضیح دهید.

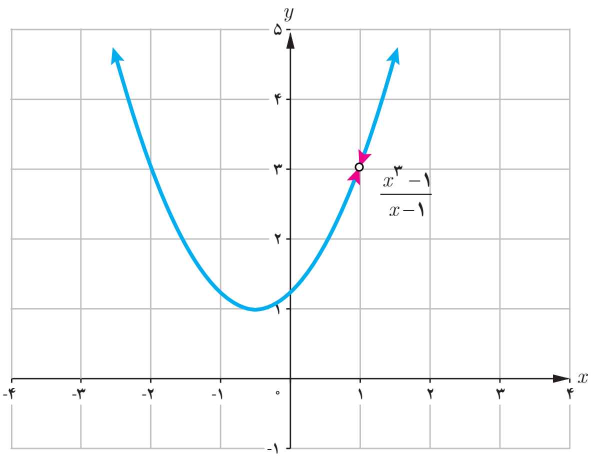
الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x^۲+۵x+۶}{x+۲}$

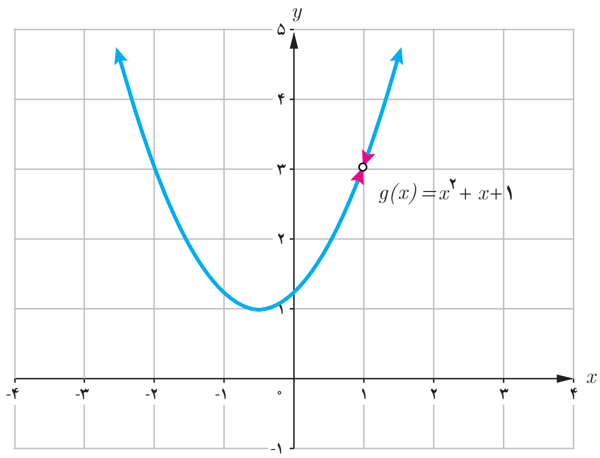
$= \lim \dfrac{(\ \ldots\ldots\ )(\ \ldots\ldots\ )}{(\ \ldots\ldots\ )}$





ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۳-۱}{x-۱}$





۱۰ــ

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و n یک عدد طبیعی باشد آن‌گاه

$$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

(اگر n زوج باشد باید $l \geq ۰$)

(**توجه**: در کتاب حاضر $f(x)$ یک تابع خطی و n برابر ۲ یا ۳ در نظر گرفته می‌شود.)

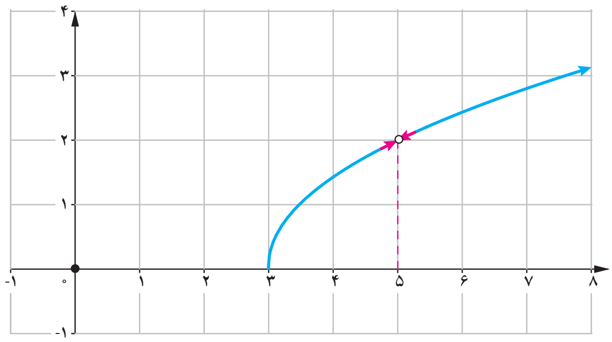
مثال : مطلوبست $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}$

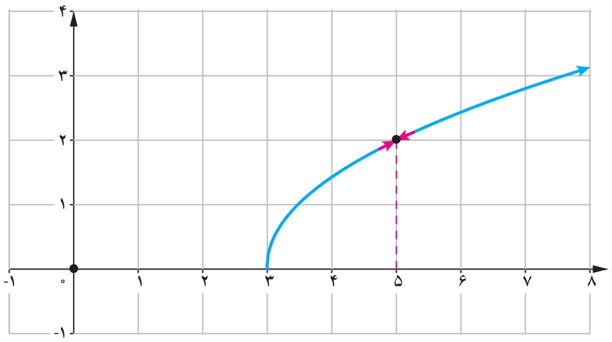
به کمک دستور فوق داریم :

$$\lim_{x\to ۵}(۲x-۶)=۴ \qquad \Rightarrow \lim_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{۴}=۲$$

کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $g(x)=\sqrt{۲x-۶} \quad (x\neq ۵)$ رسم شده‌اند.





الف) مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟

تذکر : تمام قوانینی که در این درس مطرح شد برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

ج) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$

۲ در مورد تابع $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x)=۱$

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

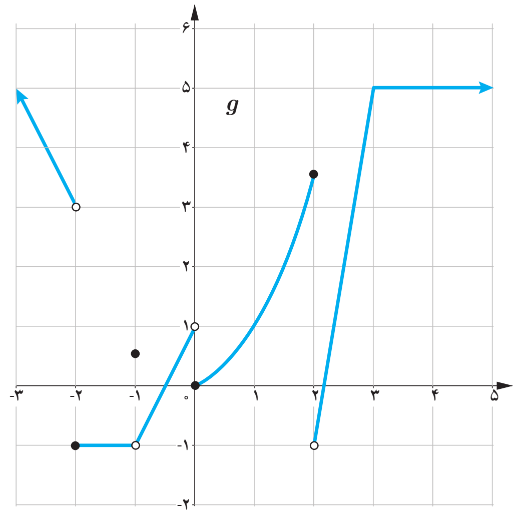
پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$

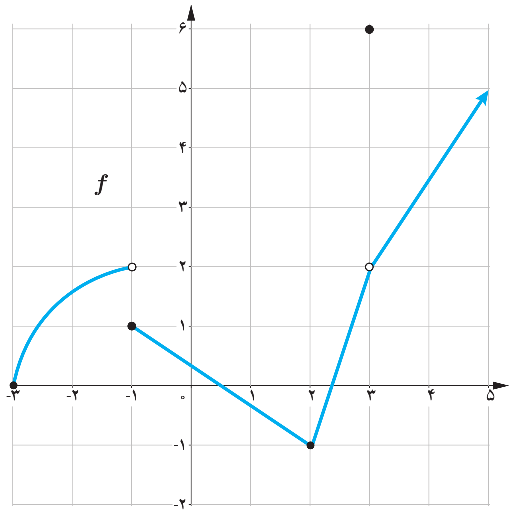
ت) $h(۰)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد.

تمرین‌های درس دوم

۱ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \big(f(x)+g(x)\big)$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} \big(f(x)+g(x)\big)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \big(۲f(x)+۵g(x)\big)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} \big(f(x)\big)^{۴}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰} \big(g(x)\big)^{۲}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to ۵} \big(f(x).g(x)\big)$

حداقل سه پرسش دیگر مانند موارد بالا مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. در مورد مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷}(-۳)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۲x-۷)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^{۲}-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲x^{۲}-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۳}+۸}{x+۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲}\sqrt{x+۵}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\sqrt{x}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{-۲x+۷}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\sqrt{x}$

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x-۲}$

۴ اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=-1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+h(x)\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\right)^5$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ج) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}$

چ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}$

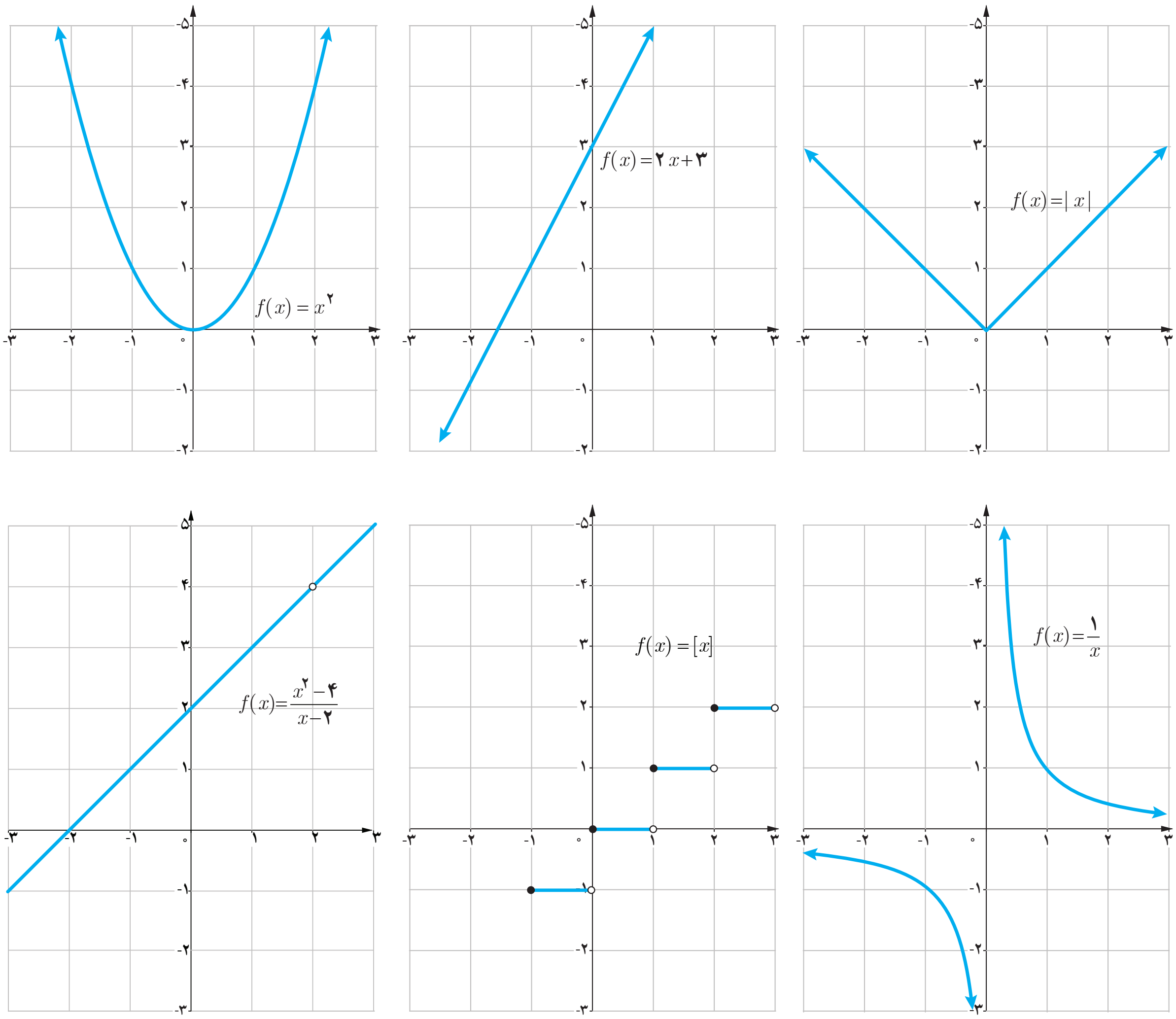
۵ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x)=1$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

درس سوم

پیوستگی

فعالیت کلاسی ۱

نمودارهای شش تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



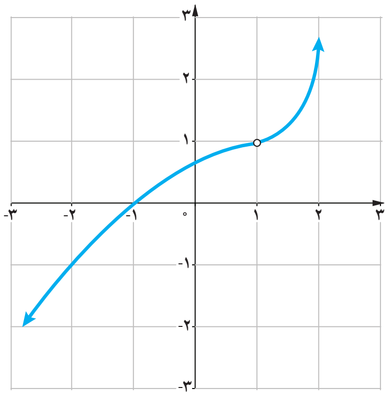
الف) کدام‌یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت رسم کرد؟

ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید.

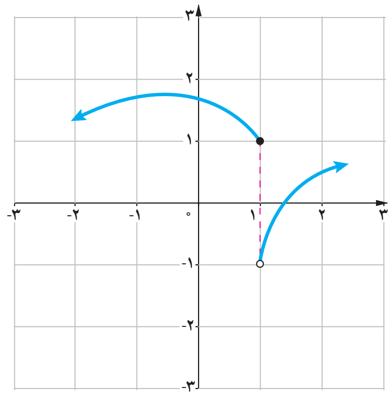
توابعی مانند آن‌چه که در ردیف اول آورده شده‌اند، بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداریم قابل رسم هستند را پیوسته نامیم.[۱]

۱ــ توجه شود که معیار فوق یک تعبیر شهودی از پیوستگی است و تعریف دقیق در ادامه ارائه می‌شود.

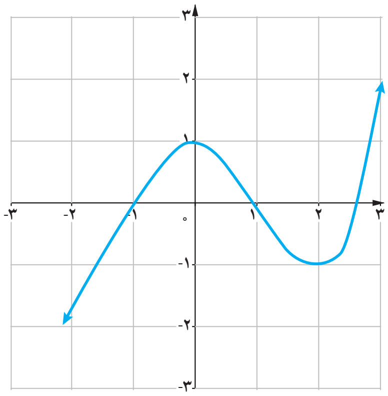
مثال : تابع‌های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته هستند.



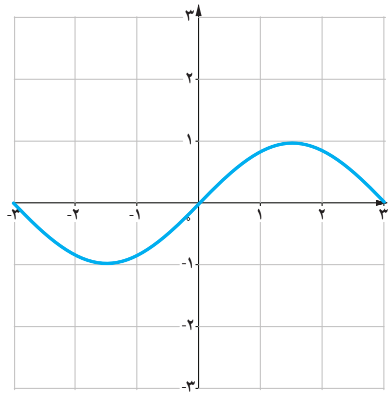
(الف)



(ب)



(پ)

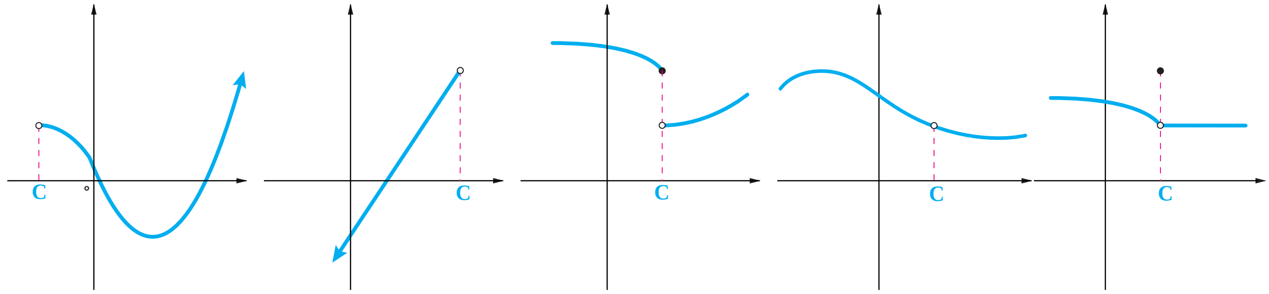


(ت)

اکنون به بررسی دقیق‌تر پیوستگی می‌پردازیم، به این منظور پیوستگی تابع در یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

> تابع f در نقطه $x=c$ را پیوسته نامیم هرگاه $(c\in\mathbb{R})$ $\quad \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد باید $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این‌صورت تابع را در c ناپیوسته نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در یک نقطه (c) در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌هایی دیگر ارائه کنید.



$\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

$f(c)$ وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد.

کار در کلاس

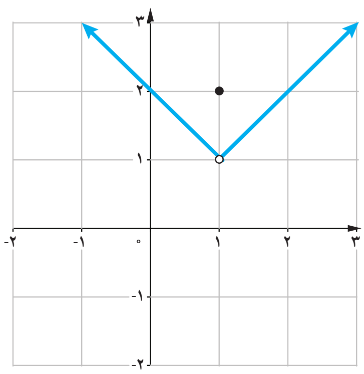
کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=1$ ناپیوسته‌اند؟

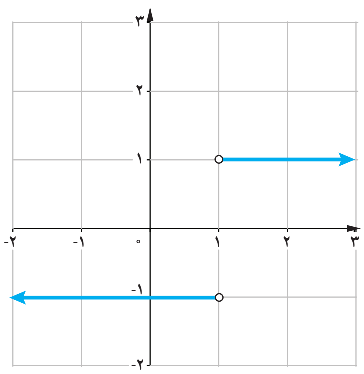
$$h(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & x<1 \end{cases}$$

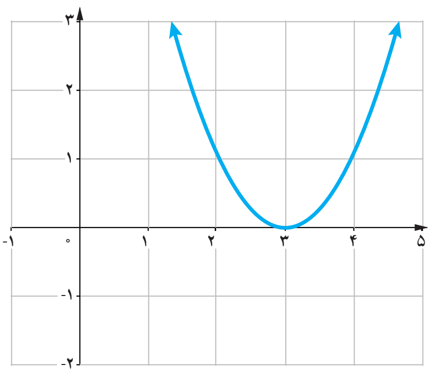
$$g(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$$

$$f(x)=(x-3)^2$$

الف)







فعالیت کلاسی ۲

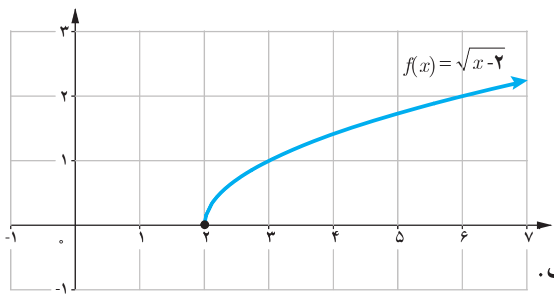
تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

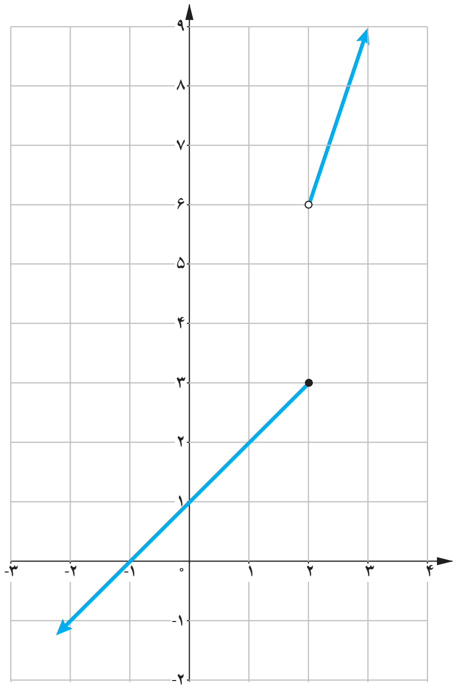
در فعالیت قبل $f(\ )$ $\lim\limits_{\to} f(x)$ گوییم f از راست در نقطه ۲ پیوسته است.



تابع f را در $x=c$ از راست پیوسته نامیم هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. در این‌صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس

تابع $g(x)=\begin{cases} ۳x & x>۲ \\ x+۱ & x\leq ۲ \end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.



الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟

در کار در کلاس بالا $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=g(۲)$. گوییم g از چپ در نقطه ۲ پیوسته است.

تابع f را در $x=c$ از چپ پیوسته نامیم هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

با توجه به تعریف معلوم است که f در $x=c$ پیوسته است هرگاه f در c هم پیوسته راست و هم پیوسته چپ باشد.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است هرگاه، در هر نقطه آن بازه پیوسته باشد.
تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته است هرگاه ....

تابع f روی بازه $(a,b]$ پیوسته است هرگاه ....

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

کار در کلاس

تابع‌هایی مثال بزنید که :

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد.

ب) روی بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد.

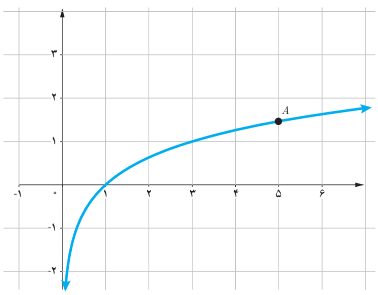
پ) روی بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد.

مثال : الف) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه f روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است، زیرا $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ $\quad (c\in\mathbb{R})$

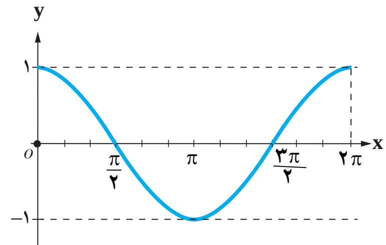
ب) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $(-\infty,\infty)$ پیوسته‌اند.

پ) تابع $f(x)=\log_۲ x$ روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است.

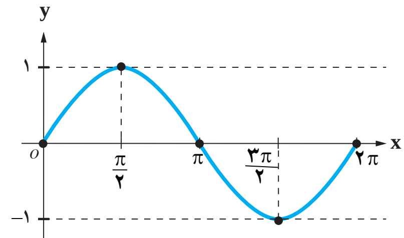
ت) اگر تابعی روی $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد روی هر زیر بازه دلخواه از اعداد حقیقی نیز پیوسته است.



$f(x)=\log_۲ x$



$f(x)=\cos x$



$f(x)=\sin x$

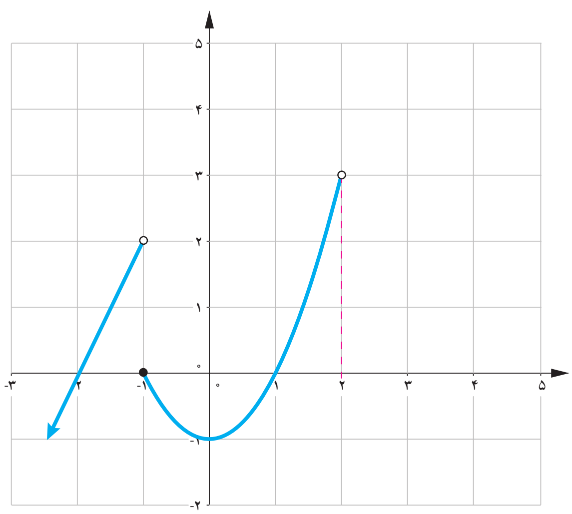
کار در کلاس

۱ تابع f با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم :
$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ بررسی کنید.



۲ با توجه به کار در کلاس بالا کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازه $(-\infty,-۱]$ پیوسته است.

ب) f روی بازه $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

پ) f روی بازه $[۲,۵]$ پیوسته است.

ت) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$

ج) f روی بازه $(-۲,۰)$ پیوسته است.

۳ با توجه به کار در کلاس ۱

الف) دو بازه بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

ب) a و bای مثال بزنید که تابع روی $[a,b]$ پیوسته باشد، اما روی (a,b) پیوسته نباشد.

تمرین‌های درس سوم

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید:

$$f(x)=۲x+۱ \quad , \quad g(x)=۲x+۱ \quad x\neq ۲ \quad , \quad h(x)=\begin{cases} ۲+x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$f(۲)= \quad , g(۲)= \quad , h(۲)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید:

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) \qquad \lim\limits_{x\to ۲} g(x) \qquad \lim\limits_{x\to ۲} h(x)$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید.

f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

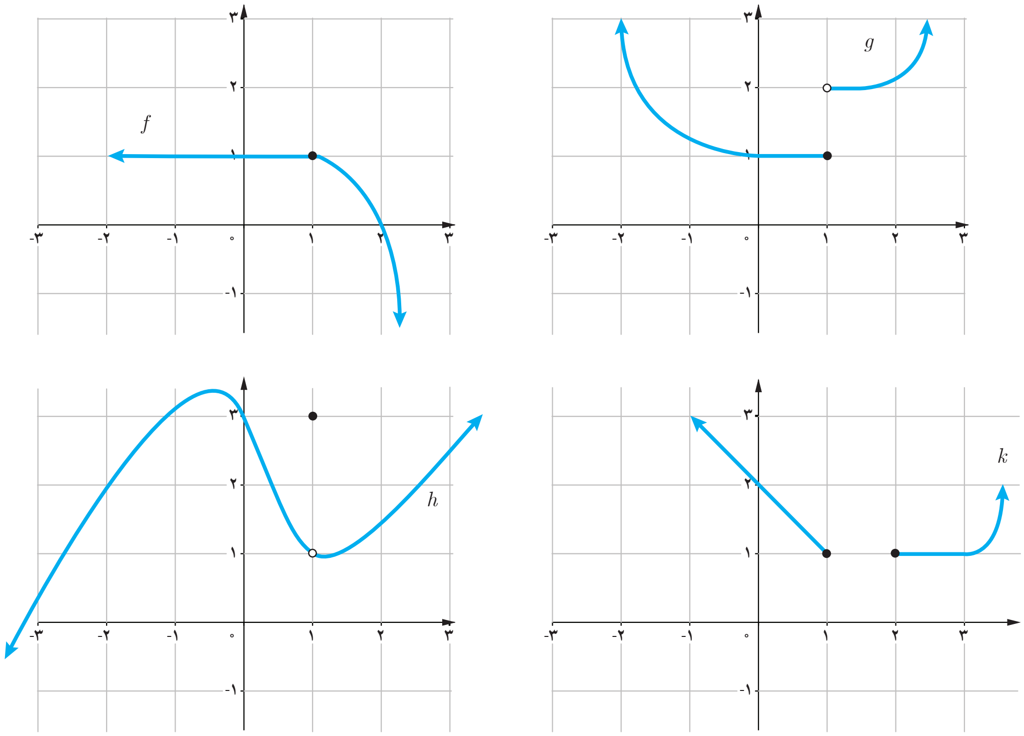
۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۵ & x=۳ \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. کدام‌یک در $x=۳$ پیوسته است؟ چرا؟

۴ تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$ را رسم کنید و پیوستگی آن در نقطه $x=۰$ را بررسی کنید. تابع در چه بازه‌هایی پیوسته است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x=۱$ مساوی ۱− باشد ولی تابع در ۱− پیوسته نباشد. نمودار این تابع را هم رسم کنید.

۷ کدام‌یک از توابع زیر در $x=۱$ پیوسته است؟



۸ روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases}۶t+۴ & ۰\leq t\leq ۱\\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰\end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است.

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[۰,۱۰]$ پیوسته است؟

فصل ۷

آمار و احتمال

درس اوّل — احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

درس دوم — نمونه‌گیری

درس سوم — آمار توصیفی

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

p 0001

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در پایه‌های قبل با احتمال و کاربرد آن در مسائل آشنا شدیم. برخی مفاهیمی که با آنها آشنایی داریم، به شرح زیر است.

یادآوری

۱ــ پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعهٔ S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A\text{-}B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه A و B هیچ وقت با هم رخ ندهند یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ فرمول محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}} \quad \text{یا به عبارتی دیگر} \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

۷ــ فرمول محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

p 0002

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S)=۳۶)$

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

{(۳,۲) و (۲,۳) و (۴,۱) و (۱,۴)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود برابر است با $\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ می‌شود به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

لذا احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود برابر است با $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با $\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$.

p 0003

احتمال شرطی

در یک آزمون علمی همواره یک پنجمِ افراد شرکت‌کننده قبول می‌شوند. سه هم‌کلاسی به نام‌های علی، آرمین و رامبد در این آزمون شرکت کرده‌اند. با خواندن جملات زیر حدس خود در مورد احتمال قبولی هر یک از آنها را بیان نمایید.

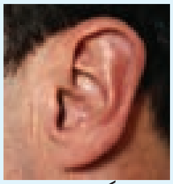
الف) در مورد علی هیچ اطلاعی در دسترس نداریم.

ب) می‌دانیم آرمین در تمام دوره های تحصیل خود شاگرد اول بوده و نمرات وی همواره عالی بوده است.

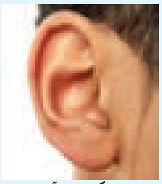
پ) می‌دانیم نمرات رامبد در طول دوره‌های تحصیلی خود همواره پایین بوده و تا به حال در چند آزمون علمی شرکت کرده است ولی در هیچ یک نمرهٔ خوبی کسب نکرده است.

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگری تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال قبولی فردی که هیچ اطلاعی از او در دست نیست و احتمال قبولی فردی با این شرط که بدانیم رتبهٔ تحصیلی او عالی بوده یکسان نیست. در این بخش به بررسی احتمال وقوع یک پیشامد به شرطی که بدانیم پیشامد دیگری رخ داده است می‌پردازیم.

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند. آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش یک انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد. با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند :



نرمه گوش پیوسته



نرمه گوش آزاد

اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت.

در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا پرداخته خواهد شد.

بار دیگر به مثال پرتاب دو تاس دقت کنید. همان‌گونه که دیدید احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده در ۱۰ شود برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است. حال اگر بدانیم در پرتاب تاس اول عدد ۲ رو شده است، آیا این موضوع بر احتمال ۱۰ شدن مجموع دو تاس تأثیر می‌گذارد؟

در این حالت احتمال ۱۰ شدن مجموع دو تاس به شرط اینکه در پرتاب تاس اول عدد ۲ رو شده باشد چقدر است؟

منظور از "احتمال A به شرط B" که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر فوق خواهیم داشت[۱] :

۱ــ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد در حالی که B رخ داده است. یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ــ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر است با $n(B)$.

۱ــ آنچه در مراحل (۱) و (۲) گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

بنابراین داریم :
$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این فرمول به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه : شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$ و اگر $P(B)=۰$ ، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

p 0007 **مثال :** احتمال وقوع نوعی بیماری در یک جامعهٔ مشخص برابر ۰/۰۴ و احتمال اینکه فردی هم دچار این بیماری شود و هم درمان یابد برابر ۰/۰۲ است. اگر فردی به بیماری مذکور دچار شده باشد، احتمال درمان یافتن او چقدر است؟

حل :

A: پیشامد مبتلا شدن فرد به بیماری مورد نظر

B: پیشامد درمان یافتن فرد مبتلا شده

$$\left.\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} P(A)=۰/۰۴ \\ P(A\cap B)=۰/۰۲\end{array}$$

حال محاسبهٔ احتمال درمان یافتن فرد به شرط اینکه مبتلا شده باشد یعنی $P(B|A)$ ، مدنظر است.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۰۲}{۰/۰۴}=\frac{۱}{۲}$$

p 0008 **مثال :** در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل :

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: احتمال رسیدن به خط پایان

$$\left.\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} P(A)=۰/۸ \\ P(A\cap B)=۰/۷\end{array}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}$$

p 0009 **مثال :** اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت نوشته و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روی کارت‌های انتخاب شده زوج باشد، چقدر احتمال داردکه هر سه عدد زوج باشند؟

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو تا زوج و یکی فرد باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A: {۲و۴و۶و۸}

B: {۱و۳و۵و۷و۹}

لذا $۴=\binom{۴}{۳}$ حالت امکان دارد هر سه عدد زوج باشند و $\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}=۴۰$ حالت امکان دارد که دو تا فرد و یکی زوج باشند. لذا ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند که در آنها ۴ حالت هست که هر سه عدد زوج باشند. پس :

$$\text{احتمال مطلوب} = \frac{\text{تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج‌اند}}{\text{تعداد کل حالاتی که مجموع سه عدد زوج است}} = \frac{۴}{۴۴} = \frac{۱}{۱۱}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد $\frac{۱}{۶}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ "قهرمان شدن" یا "برد اصلی‌ترین رقیب" برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و

حل :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱۳}{۳۶}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع **A با شرط رخ دادن B** و **بدون این شرط** یکسان باشد. یعنی پیشامد A از B مستقل است

هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $\quad (P(B)\neq 0)$ اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ،

مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ (۱)

از این فرمول به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت :

> دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

دو پیشامد را که **مستقل** نباشند، **وابسته** می‌نامیم.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد و اینکه چه وقت باید از رابطهٔ (۱) برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

با توجه به فرمول محاسبهٔ احتمال یعنی :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

اگر پیشامدی مانند B، بر هیچ کدام از $n(A)$ و $n(S)$ تأثیری نداشته باشد، به سادگی می‌توان دید که وقوع پیشامد B،احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد، لذا دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

0012 **مثال :** یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید را محاسبه کنید.

حل : فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

0013 **مثال :** فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از

این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=۰/۵$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=۰/۸$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، لذا $P(A \quad B) = P(A) \,.\, P(B) = ۰/۴$ اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A \cup B$ است و داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۵ + ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۹$$

در مثال‌های قبل استقلالِ دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟ برای توضیح بیشتر به مثال پرتاب دو تاس برمی‌گردیم. اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال ۱ مستقل است یا نه؟

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ رو شود، مستقل‌اند؟

پیشامد A پیشامد B

ب) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ رو شود، مستقل‌اند؟

پیشامد A پیشامد B

پ) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ رو شود، مستقل‌اند؟

پیشامد A پیشامد B

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، لذا تمام حالات ممکن به‌صورت زیر می‌باشد و ۶ عضو دارد.

{(۲,۶) و (۲,۵) و (۲,۴) و(۲,۳) و (۲,۲) و (۲,۱)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت $P(A|B) = P(A)$ را بررسی نماییم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت محاسبه کنیم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ افزایش می‌دهد. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود برابر $\frac{۱}{۶}$ است. لذا وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نداده است. بنابراین در این حالت A و B مستقل‌اند.

پ) در صورتی که عدد رو شده در تاس اول ۲ باشد در هیچ حالتی مجموع دو تاس ۱۰ نمی‌شود. بنابراین در این حالت احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود صفر است. لذا در این حالت وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۱۲}$ به صفر کاهش داده است.

پس در این حالت A و B مستقل نیستند.

مثال : در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم دو عامل مذکور را برای تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند یکی با A و دیگری را با a نمایش دهیم که در آن :

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا aA می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{۱}{۲}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است :

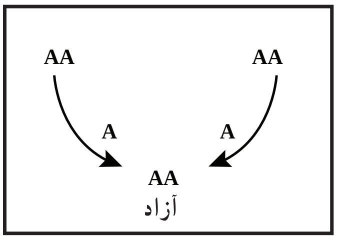
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

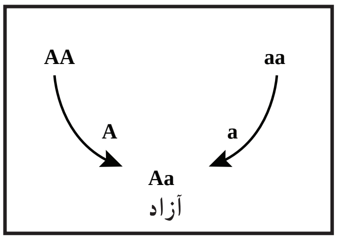
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. و یا به‌طور خلاصه داریم :

عامل‌های فرد	AA	Aa	aa
نوع نرمهٔ گوش فرد	آزاد	آزاد	پیوسته

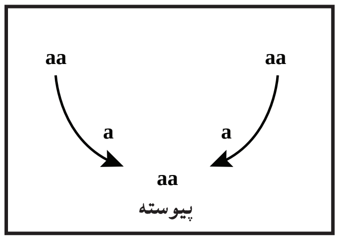
در شکل‌های زیر حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



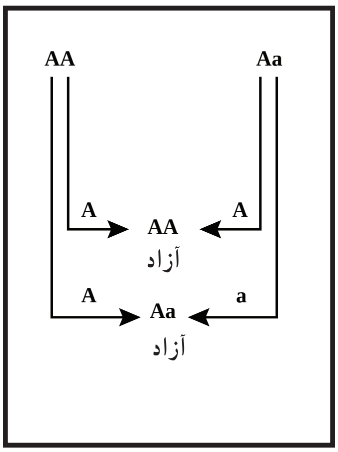
(۱)



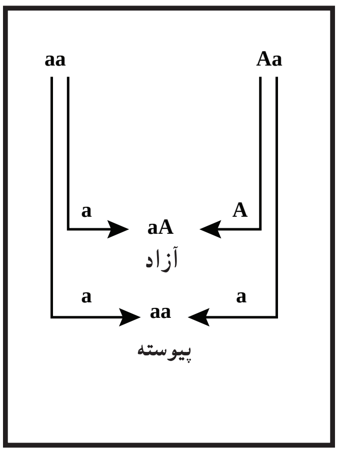
(۲)



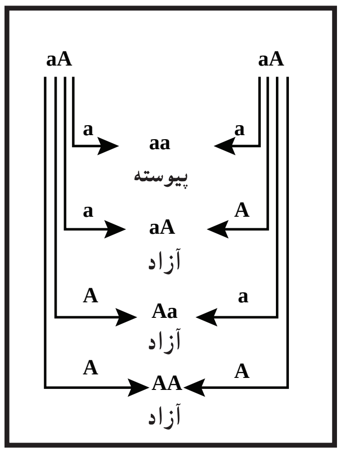
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{۱}{۲}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

p 0016

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند با چه احتمالی فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت؟

حل : از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، لذا عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آن به صورت ..... خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت ..... است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت ..... خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال ..... فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

p 0017

تمرین‌های درس اول

۱ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی بخش‌پذیر بر عدد ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا وابسته بودن هر دو تا از این پیشامدها را بررسی نمایید.

۲ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل‌اند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۵ احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر ۰/۶۲۵ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

درس دوم

نمونه‌گیری

یادآوری

در سال گذشته علم آمار به عنوان مجموعه روش‌هایی شامل جمع‌آوری اعداد و اطلاعات (به‌عنوان داده‌ها)، سازماندهی و نمایش داده‌ها، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی تعریف شد. در این درس ضمن مرور مطالب گذشته، با جمع‌آوری داده‌ها و روش‌های نمونه‌گیری آشنا خواهیم شد.

متغیر و داده

متغیر به‌عنوان ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد که معمولاً از یک عضو به عضو دیگر مقدار آن تغییر می‌کند. بدیهی است در هر پژوهشی، جمع‌آوری داده به شناخت یک ویژگی یا متغیر کمک می‌کند. **متغیر** معمولاً در قالب یک سؤال پرسیده می‌شود و پاسخ‌هایی که به ازای آن سؤال دریافت می‌شود را **داده** (مقدار متغیر) می‌نامیم.
به‌عنوان مثال وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی می‌خواهد بداند که چند درصد از جمعیت کشور ایران تحت پوشش بیمه سلامت قرار دارند، بنابراین در قالب یک پرسش‌نامه از افراد می‌پرسد «آیا تحت پوشش خدمات بیمه سلامت هستند؟» متغیر و داده مرتبط با سؤال مطرح شده، در جدول زیر آمده است:

متغیر	داده
داشتن بیمه سلامت	بلی، خیر

کار در کلاس ۱

جدول زیر را با توجه به پژوهش‌های مطرح شده، کامل نمایید.

پژوهش	متغیر	داده
معلم یک مدرسه می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد نماید، لذا از دانش‌آموزان می‌پرسد «در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟»		...، ۱۲۰، ۴۵، ۰، ۶۰
مدیر یک فروشگاه زنجیره‌ای، می‌خواهد نوشیدنی‌های خود را بر اساس سلیقه مشتریان انتخاب کند، لذا از مشتریان خود می‌پرسد «نوشیدنی مورد علاقه آنها چیست؟»	نوشیدنی مورد علاقه	

یک شرکت داروسازی می‌خواهد بداند که محصولاتش در ارتباط با سردرد چقدر مؤثر واقع شده است، بنابراین از افراد می‌پرسد «آیا به هنگام سردرد از قرص تولیدی این شرکت داروسازی استفاده می‌کنند؟»		بلی، خیر
شهرداری با هماهنگی پلیس راهور ناجا، برای احداث یک پل هوایی در یک چهارراه نیاز دارد بداند در طول یک روز به طور متوسط چند خودرو از آنجا عبور می‌کند، بنابراین سؤالی که مطرح می‌شود آن است که «هر روز چند خودرو از آن چهارراه عبور می‌کند؟»		۰, ۱, ۲, ...
سازمان میراث فرهنگی صنایع دستی و گردشگری، می‌خواهد میزان رضایت گردشگران خارجی را از سفر به ایران ارزیابی نماید، بنابراین از گردشگران خارجی می‌پرسد «آیا از سفر به ایران راضی بوده‌اند؟»		کاملاً راضی هستم، راضی هستم، نظری ندارم، راضی نیستم، اصلا راضی نیستم

بنابراین توجه به این نکته مهم است که سؤالات مختلف جنبه‌های متفاوتی از یک موضوع را آشکار می‌سازد و اطلاعات لازم از این سؤالات به‌دست می‌آید. بنابراین در طراحی سؤال باید روی متغیر موردنظر توجه و تمرکز داشته باشیم.

انواع متغیرها (یادآوری)

متغیرهایی مانند تعداد دفعات مسواک زدن و مدت زمان ورزش کردن در یک شبانه روز که قابل اندازه‌گیری هستند، متغیر **کمی** می‌نامیم. متغیرهایی مانند رنگ چشم یا شدت درد که قابل اندازه‌گیری نیستند را متغیرهای **کیفی** می‌نامیم. همان‌طور که می‌دانید معمولاً اگر پاسخ سؤال پرسیده شده عدد باشد که از اندازه‌گیری یا شمارش به دست آید آن متغیر را کمی و در غیر این‌صورت آن را متغیر کیفی می‌نامیم.

می‌دانید که متغیرهای کمی به دو گروه پیوسته و گسسته و متغیرهای کیفی نیز به دو گروه ترتیبی و اسمی تقسیم می‌شوند :

متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند مانند مدت زمان استفاده از اینترنت، مقدار شاخص توده بدنی، میزان هموگلوبین را **متغیر پیوسته** نامیم.

هر متغیر کمی که پیوسته نباشد مانند تعداد فرزندان، تعداد دندان‌های پوسیده شده، تعداد تصادف‌ها در هر شبانه روز در شهر تهران را **متغیر گسسته** می‌نامیم، معمولاً متغیر گسسته قابلیت شمارش دارد.

متغیر کیفی که در آن نوعی **ترتیب طبیعی** وجود داشته باشد مانند سطح تحصیلات، گروه‌های

سنی را **متغیر ترتیبی** می‌نامیم.
متغیر کیفی که ترتیبی نباشد مانند رنگ چشم، جنسیت وگروه‌های خونی را **متغیر اسمی** می‌نامیم.

0022

کار در کلاس ۲

جدول زیر را به کمک کار در کلاس ۱ کامل نموده و دو سطر آخر را به دلخواه خودتان پر کنید.

متغیر	داده	کمی		کیفی	
		پیوسته	گسسته	ترتیبی	اسمی
داشتن بیمه سلامت	بلی، خیر				✓
	۶۰ ,۰ ,۴۵ ,۱۲۰ ,...				
نوشیدنی مورد علاقه					
	بلی، خیر				
	۰ ,۱ ,۲, ...				
	کاملاً راضی هستم، راضی هستم، نظری ندارم، راضی نیستم، اصلاً راضی نیستم				
	خوب، متوسط، ضعیف				

0023

روش‌های جمع‌آوری داده

برای جمع‌آوری داده‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد که ضروری است روش موردنظر با سؤال‌های پرسیده شده، متناسب باشد.
برخی روش‌های مختلف جمع‌آوری داده عبارت‌اند از :
۱ــ پرسشنامه، مصاحبه.
۲ــ آزمایش.
۳ــ منابعی مانند دوستان، بستگان، روزنامه، کتاب‌ها، مجله‌ها، اینترنت و دفاتر ثبت سازمان‌ها، اداره‌های دولتی و اداره‌های غیردولتی.

به‌عنوان مثال برای هریک از سؤالات مطرح شده در کار در کلاس ۱ این درس استفاده از پرسشنامه یا مصاحبه مناسب است.

اگر در مطالعه‌ای اطلاعات مربوط به میزان هموگلوبین افراد را نیاز داشته باشیم باید افراد آزمایش خون بدهند.

اطلاعات بهداشتی پیرامون بیماری‌های واگیر یا غیرواگیر، سلامت مادر و کودک، آلودگی هوا و ... از کشورهای مختلف در درگاه سازمان بهداشت جهانی (WHO[1]) در دسترس است.

کار در کلاس ۳

مینا و دوستانش می‌خواهند در قالب یک کار پژوهشی ارتباط وضعیت تغذیه و میزان فعالیت فیزیکی را با برخی عوامل سنجش سلامت بدنی بین دانش آموزان متوسطه دوم بررسی نمایند. آنها به کمک معلم خود موارد زیر را طراحی کرده‌اند. با پر کردن جدول زیر به آنها در روش جمع‌آوری داده برای هر سؤال کمک نمایید.

سؤال	روش جمع‌آوری اطلاعات
تعداد وعده‌های غذایی فست‌فود در طول یک ماه	
میزان مصرف روزانه میوه و سبزیجات	
میانگین ساعات فعالیت فیزیکی روزانه	
وزن	
قد	
شاخص توده بدنی (BMI)	
کالری هر ماده غذایی	
قند خون ناشتا	

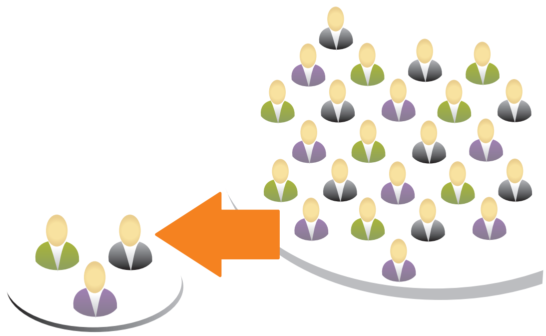
۱ـ World Health Organization

جامعه و نمونه

قبل از شروع فرایند جمع‌آوری داده، به این سؤال باید پاسخ داده شود که به چه اندازه (حجمی) از داده‌ها نیازمندیم که مطمئن شویم نتیجه حاصل، معتبر است. در پایه دهم با دو مفهوم **جامعه** و **نمونه** آشنا شدید.

جامعه : مجموعه تمام افراد یا اشیایی که تحقیق درباره یک یا چند ویژگی آنها صورت می‌گیرد را جامعه یا جمعیت نامند.

نمونه : زیر مجموعه یا بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود را نمونه نامند.



مثال ۱

سازمان میراث فرهنگی صنایع دستی و گردشگری، می‌خواهد میزان رضایت گردشگران خارجی را از سفر به ایران در سال ۱۳۹۵ ارزیابی نماید.

جامعه : کلیه گردشگران خارجی که در سال ۱۳۹۵ به ایران مسافرت کرده‌اند جامعه آماری را تشکیل می‌دهند.

نمونه : گردشگران خارجی که در شش ماهه اول سال ۱۳۹۵ از تخت جمشید دیدن کرده‌اند، نمونه آماری را تشکیل می‌دهند.

برای داشتن یک نمونه‌گیری خوب باید به دو سؤال پاسخ داد :

۱ــ حجم نمونه انتخابی چقدر باید باشد؟

۲ــ چه اعضایی باید به‌عنوان نمونه انتخاب شوند؟

به سؤال ۱، با توجه به ماهیت متغیرها و نوع مطالعه و استفاده از فرمول‌های آماری، در سطوح بالاتر آشنایی با علم آمار پاسخ خواهیم داد. برای پاسخ به سؤال ۲، هر چه اطلاع ما از جامعه مورد بررسی بیشتر باشد، در ارائه یک **نمونه مناسب** موفق‌تر خواهیم بود.

نمونه مناسب نمونه‌ای است که **معرف جامعه** باشد یعنی ویژگی‌های مورد مطالعه در نمونه و در جامعه خیلی متفاوت نباشند. در انتخاب یک نمونه نباید دچار **سوگیری** شویم زیرا سوگیری در انتخاب نمونه می‌تواند منجر به ارائه نتایج نادرست گردد.

مفهوم **سوگیری** را با یک مثال تشریح می‌کنیم :

اگر بخواهیم برآوردی از میانگین قد دانش آموزان متوسطه دوم داشته باشیم و نمونه را از تیم بسکتبال انتخاب نماییم، ممکن است برآورد نادرستی از میانگین قد دانش‌آموزان داشته باشیم.

خواندنی

سرشماری عمومی نفوس و مسکن یکی از عمده‌ترین راه‌های شناخت کشورها برای برنامه‌ریزی، نظارت، کنترل و ارزیابی خدمات و فعالیت‌های ملی و منطقه‌ای می‌باشد. مطالعهٔ اسناد و مدارک تاریخی نشان می‌دهد،کشورهای مصر، چین و بابل به ترتیب، حدود ۲۵۰۰، ۳۰۰۰ و ۳۸۰۰ سال قبل از میلاد به سرشماری نفوس اقدام نموده‌اند و اولین سرشماری جهان، به روش نوین در سال ۱۷۹۴میلادی در کشور سوئد انجام شده است. امروزه در اغلب کشورها سرشماری نفوس به فاصله هر ۵ یا ۱۰ سال انجام می‌شود.

در ایران، سرشماری در سال های ۱۳۳۵، ۱۳۴۵، ۱۳۵۵، ۱۳۶۵، ۱۳۷۵، ۱۳۸۵ شمسی انجام شده و از سال ۱۳۹۰ شمسی هر ۵ سال یک‌بار مطابق روش های علمی و متناسب با زمان توسط مرکز آمار ایران، انجام می‌شود.

در مثال «میزان رضایت گردشگران خارجی از سفر به ایران در سال ۱۳۹۵» دقیق‌ترین نتایج را زمانی خواهیم داشت که کلیه گردشگران خارجی که در سال ۱۳۹۵ به ایران مسافرت کرده اند، در این بررسی شرکت کنند. اما این کار که **سرشماری** نامیده می‌شود از نظر زمان و هزینه مقرون به صرفه نیست.

0029

کار در کلاس ۴

در هریک از عناوین پژوهشی مطرح شده جامعه را مشخص کنید و یک نمونه تعریف نمایید. سطر آخر را به دلخواه خودتان پر کنید.

عنوان پژوهش	جامعه	نمونه
بررسی مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه شهر تهران در سال ۱۳۹۵		
بررسی فراوانی نوشیدنی‌های مصرفی یک فروشگاه زنجیره‌ای در تابستان ۱۳۹۶		
بررسی میزان رضایت از مُسکن‌های تولید شده در یک شرکت داروسازی در طول سال گذشته		
بررسی سرانه مطالعه دانش آموزان در یک شبانه‌روز در سال ۱۳۹۵		

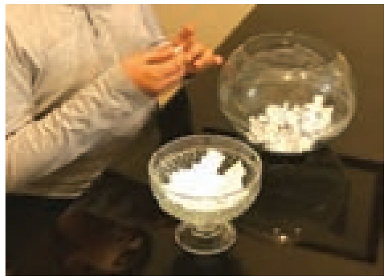
0030

روش‌های نمونه‌گیری

فعالیت کلاسی ۱

پژوهشی به‌منظور سنجش میزان علاقه‌مندی دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی در دست طراحی است. معلم از دانش‌آموزان خواست پیشنهادهای خود را مبنی بر انتخاب نمونه‌ای به اندازه ۶۰ دانش‌آموز از یک مدرسه متوسطه دوم با ۲۳۰ دانش‌آموز در پایه‌های دهم تا دوازدهم مطرح کنند. تعداد دانش‌آموزان در هر کلاس در جدول گزارش شده است:

پایه	دهم			یازدهم			دوازدهم		
کلاس	ریاضی	تجربی	انسانی	ریاضی	تجربی	انسانی	ریاضی	تجربی	انسانی
تعداد	۲۵	۳۰	۲۵	۲۰	۲۵	۳۵	۲۰	۲۰	۳۰



پیشنهاد علیرضا : علیرضا از رویکرد قرعه‌کشی استفاده کرد. به این ترتیب او لیست دانش‌آموزان مدرسه را از دفتر گرفته، به هر یک از آنها شماره ۱ تا ۲۳۰ را اختصاص داد. همچنین شماره‌های ۱ تا ۲۳۰ را روی قطعات کوچک و هم‌اندازهٔ کاغذ نوشت و آنها را در ظرفی قرار داد. سپس از خواهرش خواست ۶۰ تا از برگه‌ها را انتخاب کند. در ادامه شماره‌های رو شده را با لیست انطباق داد و به این ترتیب ۶۰ نفر از دانش آموزان را کاملاً تصادفی انتخاب کرد.

پیشنهاد محمد : محمد ابتدا تعداد کل دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی مدرسه را مشخص نمود.

رشته	ریاضی	تجربی	انسانی	جمع
تعداد جامعه	۶۵	۷۵	۹۰	۲۳۰
تعداد نمونه				۶۰

سپس تعیین کرد که از هر رشته متناسب با تعداد آن چند نفر باید انتخاب کند. به این ترتیب

تعداد انتخابی از رشته ریاضی $= ۶۰ \times \frac{۶۵}{۲۳۰} = ۱۶/۹۵ \sim ۱۷$

تعداد انتخابی از رشته تجربی $= ۶۰ \times \frac{۷۵}{۲۳۰} = ۱۹/۵۶ \sim ۲۰$

تعداد انتخابی از رشته انسانی $= ۶۰ \times \frac{۹۰}{۲۳۰} = ۲۳/۴۷ \sim ۲۳$

در پایان تعداد مشخص شده از هر رشته را به صورت قرعه کشی (به تصادف) از هر رشته انتخاب نمود.

پیشنهاد سعید : سعید خود دانش‌آموز پایهٔ یازدهم رشته تجربی و برادرش دانش‌آموز پایهٔ دهم رشتهٔ انسانی است. لذا او پیشنهاد کرد دانش‌آموزان این دو کلاس انتخاب شوند.

۱ــ در کدام روش سوگیری وجود دارد؟

۲ــ کدام نمونه معرف بهتری از جامعه است؟

۳ــ شما کدام روش را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

نمونه‌گیری تصادفی ساده : در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده همه اعضا شانس انتخاب برابر دارند. ابزار مورد نیاز در این روش داشتن فهرستی از جامعه است و به هر عضو جامعه عددی از یک تا N (حجم جامعه) تعلق می‌گیرد. سپس به اندازه حجم نمونه (n)، عدد به

تصادف انتخاب می‌کنیم. این کار را می توانید با استفاده از قرعه‌کشی و ماشین حساب انجام دهید. با مراجعه به فهرست جامعه، افراد منتخب مشخص می‌گردند.

> در فعالیت ۱ علیرضا برای انتخاب نمونه از روش تصادفی ساده استفاده کرده است. البته برای انتخاب تصادفی ۶۰ عدد از ۲۳۰ عدد، از قرعه کشی استفاده نمود.

تولید عدد تصادفی با استفاده از ماشین حساب

برخی ماشین‌حساب‌ها عدد تصادفی تولید می‌کنند. شما به‌عنوان پژوهشگر از قبل با توجه به تعداد افراد جامعه مورد بررسی مشخص می‌کنید که از عدد تصادفی (بدون در نظر گرفتن ممیز) تولید شده چند رقم و از کدام سمت انتخاب شود. با فشار دادن دکمه مربوطه (با توجه به مدل ماشین حساب)، تولید عدد تصادفی را تا رسیدن به حجم نمونه موردنظر ادامه دهید.

کار در کلاس ۵

با استفاده از تولید عدد تصادفی با ماشین حساب، به مدیر دبیرستان در انتخاب نمونه تصادفی ۱۰ نفره از فهرست ۵۰ نفری زیر کمک کنید.

۱ـ مونا	۲ـ زهرا	۳ـ سیما	۴ـ شراره	۵ـ نگار	۶ـ افروز	۷ـ سمانه	۸ـ ملیحه	۹ـ سپیده	۱۰ـ الهام
۱۱ـ ساناز	۱۲ـ مهناز	۱۳ـ مینا	۱۴ـ سیمین	۱۵ـ مرضیه	۱۶ـ راضیه	۱۷ـ فریده	۱۸ـ فاطمه	۱۹ـ مهسا	۲۰ـ الناز
۲۱ـ مریم	۲۲ـ سمیه	۲۳ـ لیلا	۲۴ـ درنا	۲۵ـ آذر	۲۶ـ فرناز	۲۷ـ النا	۲۸ـ رژین	۲۹ـ لاله	۳۰ـ دریا
۳۱ـ بهار	۳۲ـ افسون	۳۳ـ سارا	۳۴ـ صبا	۳۵ـ سحر	۳۶ـ پریناز	۳۷ـ سورن	۳۸ـ زهره	۳۹ـ نجمه	۴۰ـ عسل
۴۱ـ هدیه	۴۲ـ نیکی	۴۳ـ گلنار	۴۴ـ نازنین	۴۵ـ رزا	۴۶ـ شیما	۴۷ـ مستانه	۴۸ـ شیرین	۴۹ـ پروین	۵۰ـ رویا

[**راهنمایی** : جهت حرکت و ارقام انتخابی خود روی جدول را مشخص نمایید (مثلاً حرکت به سمت راست و دو رقم سمت راست). ۱۰ عدد انتخاب شده باید کمتر از ۵۰ باشد در غیراین‌صورت عدد بعدی انتخاب می‌شود و در پایان با مراجعه به فهرست ۱۰ نفر را مشخص کنید.]

نمونه‌گیری در دسترس : در این روش معمولاً افراد داوطلب و در دسترس جامعه، در نمونه انتخابی قرار می‌گیرند؛ مثلاً برای انتخاب نمونه‌ای از بیماران مبتلا به دیابت نوع دوم در شهر تهران، تنها بیماران مراجعه کننده به بیمارستان طالقانی به عنوان نمونه انتخاب شوند. گرچه این روش نمونه‌گیری چندان دقیق نیست اما گاه در عمل چاره‌ای جز استفاده از این روش‌ها نداریم و این روش به امکان‌پذیری کار بسیار کمک می‌کنند.

0038

در فعالیت ۱ سعید برای انتخاب نمونه از روش در دسترس استفاده کرده است.

مثال ۲ : فرمانداری سپیدان می‌خواهد نمونه‌ای ۱۵ نفری از نوجوانان پسر در سه مدرسه متوسطه دوم واقع در مرکز شهرستان برای شرکت در اردوی فرهنگی تابستانه انتخاب نماید.

نمونه‌گیری در دسترس : از کارمندان فرمانداری خواسته شد تا در صورت تمایل و داشتن فرزند پسر در متوسطه دوم، با ارائه کپی کارت ملی، فرزند خود را در این اردو ثبت‌نام نمایند و اولویت با کسانی است که زودتر اقدام کنند.

نمونه‌گیری تصادفی ساده : فرمانداری سپیدان با ارسال نامه‌ای به سه مدرسه پسرانه متوسطه دوم مرکز شهرستان از آنها خواست تا لیست دانش آموزانی که تمایل به شرکت در یک اردوی فرهنگی دارند را ارسال نمایند. سپس لیست‌های ارسالی از سه مدرسه را ادغام نموده و به این ترتیب لیست جامعه را تشکیل دادند. با استفاده از جدول اعداد تصادفی ۱۵ عدد به تصادف انتخاب شد، با مراجعه به لیست، نام و نام خانوادگی دانش آموزان منتخب مشخص گردید. سپس در قالب دعوتنامه به هر سه مدرسه، دانش آموزان منتخب به اردوی فرهنگی تابستانه دعوت شدند.

0011

0039

کار در کلاس ۶

۱ــ در مثال «میزان رضایت گردشگران خارجی از سفر به ایران در سال ۱۳۹۵» انتخاب گردشگرانی که در فروردین ۱۳۹۵ از تخت جمشید دیدن کرده‌اند، چه نوع نمونه‌گیری است؟

۲ــ در مثال «میزان رضایت گردشگران خارجی از سفر به ایران در سال ۱۳۹۵»، پیشنهاد شما برای انتخاب یک نمونه ۵۰۰ نفری از گردشگران خارجی با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده چیست؟

0040

تمرین‌های درس دوم

۱ آیا سؤالات زیر برای مطرح شدن در یک پژوهش مناسب است؟ چرا؟

ــ با توجه به اینکه تحقیقات نشان می‌دهد بیشتر بزهکاران علاقه و تمایل به ازدواج ندارند، آیا جوانانی مانند شما امکان ازدواج دارند؟

ــ با توجه به امکانات شبانه روزی پلیس، نظر شما در مورد میزان افزایش امنیت اجتماعی چیست؟

0041

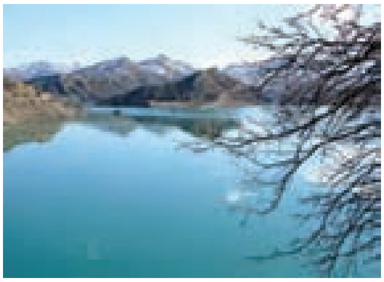
برای آماردان شدن باید در این رشته تحصیلات دانشگاهی داشته باشیم اما درک آمار برای همه لازم است.

۲ نوع هر متغیر را مشخص نمایید.

متغیر	داده	کیفی		کمی	
		اسمی	ترتیبی	گسسته	پیوسته
نرخ تورم	۱٪، ۲٪،...				
تعداد تصادفات یک راننده	۰و۱و۲و۳و....				
رنگ خودرو	مشکی، بژ، سفید				
وضعیت اشتغال	بیکار، شاغل، خارج از نیروی کار				
درجه افسردگی	نرمال، خفیف، متوسط، شدید				

P 0042

۳ دو طرح برای انتخاب یک نمونه از سالمندان ساکن شهر ایلام ارائه شده است:



I 0012

الف) برای انتخاب نمونه‌ای ۱۰۰ نفری از سالمندان ساکن شهر ایلام، ابتدا با مراجعه به فهرست سالمندان تحت پوشش هر یک از مراکز بهداشت جمعیت کل سالمندان شهر ایلام را مشخص نموده و سپس به هر عضو از جمعیت یک کد اختصاص می یابد. سپس به کمک جدول اعداد تصادفی ۱۰۰ عدد انتخاب شده و با مراجعه به لیست نمونه انتخابی مشخص می‌گردد.

ب) برای انتخاب نمونه‌ای ۱۰۰ نفری از سالمندان ساکن شهر ایلام فراخوان دعوت به «مشارکت در یک طرح پژوهشی برای سالمندان» در اماکن عمومی شهر ایلام مانند مساجد، پارک ها و ... نصب می‌گردد و از علاقه‌مندان دعوت می‌شود که در یک ساعت مشخص در یک مکان مشخص حاضر گردند.

ــ ابتدا نوع روش نمونه گیری هر طرح را مشخص نمایید.

ــ سپس برای هر روش یک نقطه قوت و یک نقطه ضعف بیان نمایید.

۴ در شهر نیشابور برای بررسی کیفیت زندگی افراد مبتلا به دیابت نوع دوم پژوهشی در دست انجام است. جدول زیر مراکز بهداشت و تعداد مراجعین مبتلا به دیابت نوع دوم هر مرکز را نشان می‌دهد.

مرکز بهداشت	شماره ۱	شماره ۲	شماره ۳	شماره ۴	شماره ۵	شماره ۶	شماره ۷	شماره ۸
تعداد مراجعین مبتلا به دیابت نوع دوم	۱۰۰	۵۸	۶۴	۱۱۵	۴۹	۱۲۱	۱۳۰	۸۸

ــ جامعه مورد بررسی را تعریف کنید.

ــ برای انتخاب ۱۰۰ نفر نمونه تصادفی، چگونه عمل می‌کنید؟

ــ برای انتخاب ۱۰۰ نفر نمونه در دسترس، چگونه عمل می‌کنید؟

درس سوم

آمار توصیفی

P 0043

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای‌های پراکندگی** می‌پردازد. آمارتوصیفی اطلاعی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

P 0044

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می شود تا دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به‌صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم ایده کلی درباره ویژگی مورد مطالعه به‌دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به‌سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایه هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها است که آن را با μ نشان می‌دهیم و برابر است با :

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

P 0045

فعالیت کلاسی ۱

محمد جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت نمود. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوه محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه نمود :

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم نمود :

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ....

0046

ویژگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد.

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

0047

کار در کلاس

۱ در فعالیت ۱، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجه سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

0048

میانه

مثال۱ : در فعالیت ۱، جرم کدام دوست محمد، در وسط داده‌ها قرار دارد؟

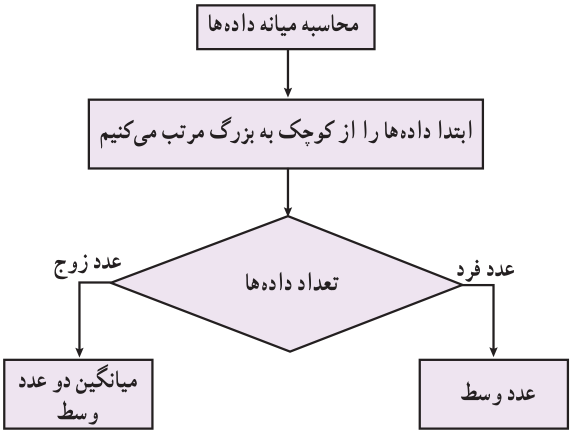
محمد برای پاسخ به این سؤال :

۱ــ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد :

۵۵ ۵۵ ۵۷ ۶۱ ۶۲

۲ــ جرم رضا و احمد از سام کمتر است، در حالی‌که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

عدد ۵۷ (جرم سام) را میانه داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.



مثال ۲

ــ میانگین و میانه اعداد زیر را بیابید.

۵   ۲۰   ۷۲   ۱۴   ۱۰   ۱۱

الف) محاسبه میانگین

$$\mu = \frac{۱۱+۱۰+۱۴+۷۲+۲۰+۵}{۶} = ۲۲$$

مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ

۵, ۱۰, ۱۱, ۱۴, ۲۰, ۷۲

ب) محاسبه میانه

$$\frac{۱۱+۱۴}{۲} = ۱۲/۵$$

برای این داده‌ها ترجیح می‌دهید میانگین گزارش شود یا میانه؟ چرا؟

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. درصورتی که میانه داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین درصورت وجود داده دورافتاده، میانه گزارش می‌کنیم در غیراین‌صورت میانگین را گزارش می‌کنیم.

کار در کلاس ۲

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایه یازدهم، قبل از یک مسابقه دو است.

۸۶   ۹۷   ۹۲   ۸۹   ۱۰۱   ۹۸   ۹۸   ۱۰۵   ۷۵   ۸۲   ۹۱   ۱۰۰

ــ میانه داده‌ها را مشخص نمایید.

ــ میانگین داده‌ها را مشخص نمایید.

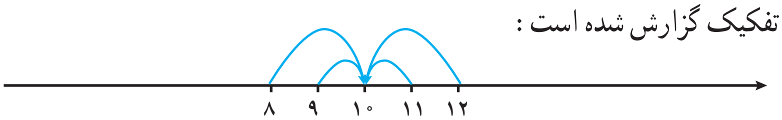
معیارهای پراکندگی

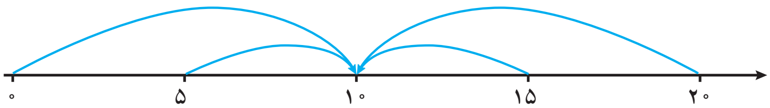
میانه و میانگین معیارهایی هستند که اطلاعی پیرامون مرکز داده‌ها فراهم می‌کنند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به‌عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

فعالیت کلاسی ۲

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰





میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه نمایید.

میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه نمایید.

به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت ۲ ملاحظه می‌نمایید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاع کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها توجه نمود.

دامنهٔ تغییرات

دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها است.

مثال ۳: در فعالیت ۲ برای محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A و کلاس B، به‌صورت زیر عمل نمایید:

	کلاس B	کلاس A
کوچک‌ترین داده	۰	۸
بزرگ‌ترین داده	۲۰	۱۲
دامنهٔ تغییرات	۲۰ − ۰ = ۲۰	۱۲ − ۸ = ۴

در فعالیت ۲ دامنه تغییرات نمره ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنه تغییرات نمره ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.

کار در کلاس ۳

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند گزارش کنند. دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۹ ۸ ۱۵

دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعدادکتاب‌های غیردرسی که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند را به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنه تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

همان طور که می‌بینید دامنه تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. بنابراین این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس: در جستجوی شاخصی بهتر برای بیان پراکندگی داده‌ها هستیم. از آنجا که میانگین معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشد و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

فعالیت کلاسی ۳

ـ در فعالیت ۲ اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جداول زیر محاسبه نمایید.

کلاس B	
y_i	$(y_i - \mu_y)$
۰	
۵	
۱۰	
۱۵	
۲۰	

کلاس A	
x_i	$(x_i - \mu_x)$
۸	
۹	
۱۰	
۱۱	
۱۲	

ـ مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه نمایید.

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده و همواره برای هرمجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

0058

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدرمطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده نمود. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

ـ مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه نمایید.

کلاس B		
y_i	$(y_i - \mu_y)$	$(y_i - \mu_y)^2$
۰		
۵		
۱۰		
۱۵		
۲۰		

کلاس A		
x_i	$(x_i - \mu_x)$	$(x_i - \mu_x)^2$
۸		
۹		
۱۰		
۱۱		
۱۲		

0059

ـ مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه نمایید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$= (۸-۱۰)^۲ + \dots + (۱۲-۱۰)^۲$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$= (۰-۱۰)^۲ + \dots + (۲۰-۱۰)^۲$

ـ میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$= \frac{(۸-۱۰)^۲ + \dots + (۱۲-۱۰)^۲}{۵}$
میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$= \frac{(۰-۱۰)^۲ + \dots + (۲۰-۱۰)^۲}{۵}$

0060

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می نامند و از نماد σ^2 برای نمایش آن استفاده می‌شود :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2}{N}$$

همان‌طور که در فعالیت ۳، دیده می‌شود واریانس بزرگ (کلاس B) نشان دهنده دور بودن داده‌ها از میانگین آنها و واریانس کوچک (کلاس A) نشان دهنده نزدیکی داده‌ها به میانگین آنها است. چنانچه همه داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس آنها صفر خواهد بود. بنابراین واریانس معیار بهتری برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

0061

کار در کلاس ۴

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در کاردرکلاس ۲، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
	۱۴	۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵
	۱۴	۱۱ ۵ ۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵

همان‌طور که در کاردرکلاس ۴، دیده می‌شود واریانس برخلاف دامنه تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

0062

ویژگی‌های واریانس : اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد.

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

0063

کار در کلاس ۵

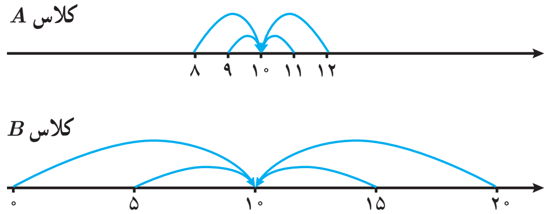
۱ در فعالیت ۱، انحراف معیار جرم دوستان محمد چند گرم است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد، اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه^2(سانتیگراد) باشد، واریانس دمای هوا چند فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{9}{5}C+32$)

انحراف معیار

معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی فعالیت ۳ در جدول زیر آمده است.

	میانگین	میانه	دامنه تغییرات	واریانس	جذر واریانس
کلاس A	۱۰	۱۰	۴	۲/۵	۱/۶
کلاس B	۱۰	۱۰	۲۰	۶۲/۵	۷/۹



همان‌طور که در جدول و نمودار بالا دیده می‌شود واریانس پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حدانتظار نشان می‌دهد، زیرا در محاسبه واریانس از میانگین **مجذور** اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود. درحالی‌که جذر واریانس شاخص بهتری برای پراکندگی حول میانگین داده‌ها است.

جذر واریانس انحراف معیار نامیده می‌شود و با نماد σ نمایش داده می‌شود :

$$\sigma=\sqrt{\sigma^{۲}}=\sqrt{\frac{(x_1-\mu)^{۲}+\cdots+(x_N-\mu)^{۲}}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟
مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در فعالیت ۲، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییر

ضریب تغییر که با v نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین $v=\frac{\sigma}{\mu}$ است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. این ضریب که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد در عمل برای مقایسه به کار می‌رود.

مثال ۴

ضریب تغییر نمره ریاضی کلاس A و کلاس B در فعالیت ۲ محاسبه شد.

	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییر
کلاس A	۱۰	۱/۶	$\frac{۱/۶}{۱۰}=۰/۱۶$ ،۱۶٪
کلاس B	۱۰	۷/۹	$\frac{۷/۹}{۱۰}=۰/۷۹$ ،۷۹٪

ترجیح معلم ریاضی تدریس در کلاس A است که ضریب تغییر کمتری دارد.

0067

کار در کلاس ۶

دمای هوای یک هفته اسفند مشهد وکیش به ترتیب به فارنهایت و سانتیگراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است؟

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
۳۷	۳۷	۳۹	۴۱	۴۹	۵۳	۵۰	مشهد (فارنهایت)
۲۱	۲۲	۲۲	۲۳	۲۴	۲۶	۲۷	کیش (سانتی‌گراد)

0068

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیر سه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است.

۹۵ ۹۳ $\boxed{۸۷}$ ۸۰ ۷۵ $\boxed{۷۰}$ ۶۰ ۵۱ $\boxed{۴۸}$ ۲۴ ۲۲

چارک سوم — میانه — چارک اول

می‌بینید که ۲۵٪ داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰٪ داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵٪ دادها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.

محاسبه چارک‌ها

↓

ابتدا میانه داده‌ها را به‌دست آورید

↓

برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

↓

برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

0069 **مثال ۵ :** داده‌های زیر مربوط به کاردرکلاس ۱ تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایه یازدهم قبل از یک مسابقه دو است. چارک‌ها را مشخص نمایید.

۸۶ ۹۷ ۹۲ ۸۹ ۱۰۱ ۹۸ ۹۸ ۱۰۵ ۸۲ ۹۱ ۱۰۰ ۷۵

داده‌های مرتب شده

۱۰۵ ۱۰۱ $\boxed{۱۰۰}$ ۹۸ ۹۸ $\boxed{۹۷ \quad ۹۲}$ ۹۱ ۸۹ $\boxed{۸۶}$ ۸۲ ۷۵

چارک سوم ← ۱۰۰ | ۹۴/۵ ← ۹۷ و ۹۲ | چارک اول ← ۸۶

0070 **کار در کلاس ۷**

چارک اول و سوم نمره‌های درس ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را در داده‌های زیر مشخص نمایید.

۱۶ ۱۵ ۱۰ ۲۰ ۱۸ ۱۹ ۱۵ ۱۷ ۱۴ ۱۸ ۵ ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۷

0071 جداول فراوانی و نمودارها

در سال‌های گذشته دیدید که برای گزارش درصد و فراوانی متغیرهای کیفی و کمی گروه‌بندی‌شده از جدول فراوانی استفاده می‌شود.

0072 **مثال ۶ :** در یک پژوهش از ۵۰ خانوار پرسیده شده که آیا تحت پوشش بیمه سلامت هستند یا خیر؟ پاسخ آنها در زیر گزارش شده است :

0017

بلی	بلی	خیر	بلی	بلی	بلی	خیر	خیر	بلی	بلی
بلی	بلی	خیر	خیر	بلی	خیر	خیر	بلی	بلی	بلی
بلی	خیر	بلی	بلی	بلی	بلی	خیر	خیر	بلی	بلی
بلی	بلی	بلی	خیر	بلی	بلی	خیر	بلی	بلی	خیر
خیر	بلی	بلی	خیر	بلی	خیر	بلی	بلی	خیر	بلی

0073 **خواندنی**

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم ،... و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

0018

چنانچه دولت بخواهد یارانه افرادی که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است را حذف کند و به یارانه افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است ۵۰٪ اضافه نماید، آیا برای دولت مقرون به‌صرفه است؟

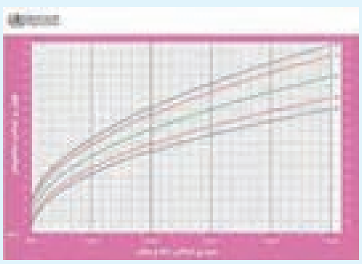
صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم ،...و صدک نودونهم) مقادیر نودونه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست‌وپنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازه قد باید مورد ارزیابی قرار گیرند.

ــ منظور از صدک سوم قد چیست؟

ــ بر اساس جمله فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟

0019



در این پژوهش متغیر، داشتن بیمهٔ سلامت و داده، بلی ــ خیر است، بنابراین متغیر کیفی اسمی است.

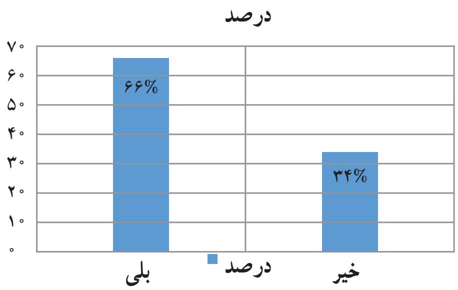
برای گزارش فراوانی و درصد این متغیر می‌توان از جدول فراوانی استفاده نمود :

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل}}$$

داده	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد
بلی	۳۳	$\frac{33}{50}$	$\frac{33}{50}\times 100 = 66\%$
خیر	۱۷	$\frac{17}{50}$	$\frac{17}{50}\times 100 = 34\%$

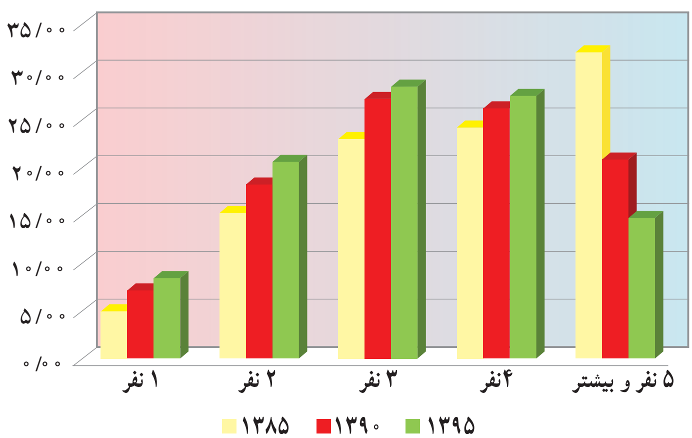
برای نمایش ساده‌تر داده‌ها می‌توان از نمودار هم کمک گرفت. نمودار به‌علت ایجاد ارتباط گرافیکی با حس بینایی انسان، می‌تواند نقش مؤثری در ارائه اطلاعات ایفا کند. برای داده‌های کیفی و کمی گروه‌بندی شده هم نمودار میله‌ای (ستونی)[1] و هم نمودار دایره‌ای[2] رسم می‌شود، البته بهتر است نمودار دایره‌ای تنها برای متغیرهای اسمی ترسیم گردد.

نمودار میله‌ای : محور x در این نمودار داده و محور y درصد یا فراوانی را نشان می‌دهد. عرض میله‌ها باید برابر باشد و نباید آنها به هم بچسبند. نمودار زیر نمودار میله‌ای مربوط به‌متغیر داشتن بیمهٔ سلامت است.



کار در کلاس ۸

نمودار مقابل فراوانی خانوارهای ایرانی برحسب تعداد افراد خانوارها در سال‌های ۱۳۹۵ــ۱۳۸۵ را براساس اطلاعات مرکز آمار ایران نشان می‌دهد. نمودار مقابل بیانگر چیست؟

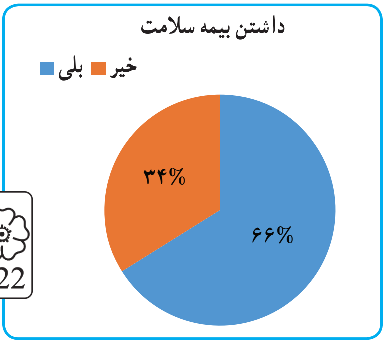


۱ــ Bar Chart

۲ــ Pie Chart

نمودار دایره‌ای : در نمودار دایره‌ای هر قطاع درصد مربوط به هر داده متغیر کیفی را نشان می‌دهد. برای محاسبه زاویه هر قطاع، فراوانی نسبی هر داده را در ۳۶۰ درجه ضرب می‌کنیم. نمودار مقابل نمودار دایره‌ای مربوط به متغیر داشتن بیمه سلامت است.

داده	زاویه قطاع
بلی	$\frac{۳۳}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۲۳۷/۶^\circ$
خیر	$\frac{۱۷}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۲/۴^\circ$



$۳۶۰^\circ \times$ فراوانی نسبی = زاویه قطاع

رنه دکارت ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی (۱۶۵۰ـ۱۵۹۶ میلادی) اولین کسی بود که نمودار را معرفی کرد.

کار در کلاس ۹

درصد استفاده از انواع سیستم‌های عامل در گوشی‌های هوشمند در سال ۲۰۱۵ میلادی در جدول زیر گزارش شده است. برای این اطلاعات یک نمودار دایره‌ای ترسیم کنید.

انواع سیستم عامل	Android	ios	Windows	Blackberry	others
درصد	۸۰/۷	۱۷/۷	۱/۱	۰/۲	۰/۲

جدول فراوانی گروه‌بندی شده

کار در کلاس ۱۰

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد نماید. لذا از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید : در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

در این داده‌ها، مدت زمان استفاده از اینترنت متغیر است و داده می‌تواند هر عددی در بازه $[۰, +\infty)$ باشد. بنابراین این متغیر کمی پیوسته است.

برای گزارش فراوانی و درصد در داده‌های کمی پیوسته و گسسته با دامنه تغییرات بزرگ باید ابتدا داده‌ها را گروه‌بندی کنیم. در گروه‌بندی داده‌ها باید به این نکته‌ها توجه نمود :

ـ گروه‌ها به گونه‌ای تعریف شود که کمینه و بیشینه داده‌ها را دربرگیرد.

ـ تعدادگروه‌ها متناسب با تعداد داده‌ها انتخاب شود و برای سهولت کار بهتر است تعداد گروه‌ها از ۷ یا ۸ گروه بیشتر نباشد.

ـ لازم نیست فاصله گروه‌ها با هم برابر باشد.

خواندنی

بیشتر اوقات با متغیرهایی روبه‌رو هستیم که دسته‌بندی شده‌اند؛ مثلاً سازمان بهداشت جهانی شاخص توده بدنی را به‌صورت زیر تقسیم بندی کرده است :

زیر ۱۸/۵ : کمبود وزن

۱۸/۵تا۲۴/۹ : وزن نرمال

۲۵ تا ۲۹/۹ : اضافه وزن

۳۰ تا ۳۴/۹ : چاقی درجه ۱

۳۵ تا ۳۹/۹ : چاقی درجه ۲

بیشتر از ۴۰ : چاقی مفرط و مرگبار

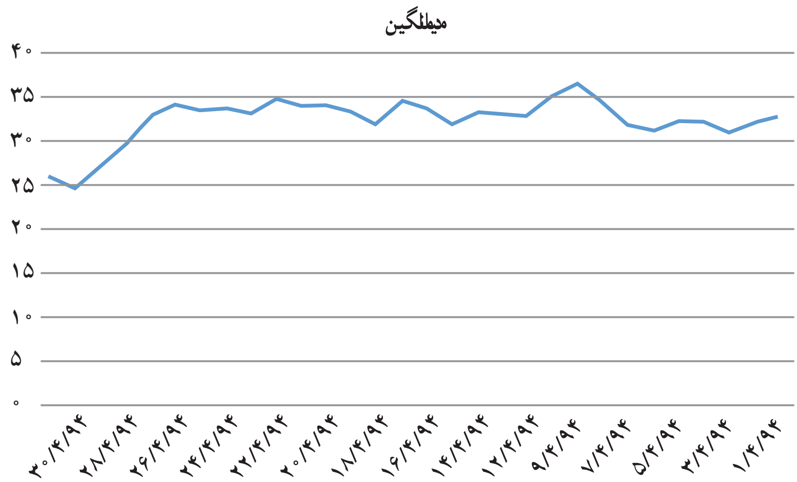
کار در کلاس ۱۰

جدول فراوانی داده‌های مدت زمان استفاده از اینترنت را برای گروه‌های تعریف شده کامل نمایید :

گروه	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد
[۱۵,۶۰)			
[۶۰,۱۲۰)			
[۱۲۰,۲۰۰]			

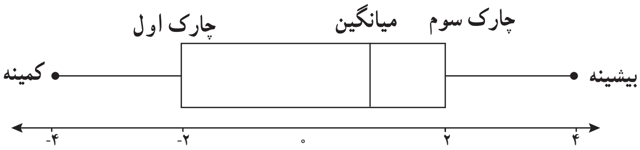
نمودار خطی (خط شکسته)[1] : در جدول مقابل میانگین دمای تیرماه ۹۴ تهران به سانتیگرادگزارش شده است. برای بررسی روند تغییرات دما در طول یک ماه یا روندهای مشابه در طول زمان یا مکان از نمودار خطی استفاده می‌شود. در نمودار زیر می‌بینید که محور x زمان و محور y دمای هوا را نشان می‌دهد.

میانگین دما	تاریخ
۳۴	۹۴/۴/۱
۳۳	۹۴/۴/۲
۳۲	۹۴/۴/۳
۳۱	۹۴/۴/۴
۳۲	۹۴/۴/۵
⋮	⋮



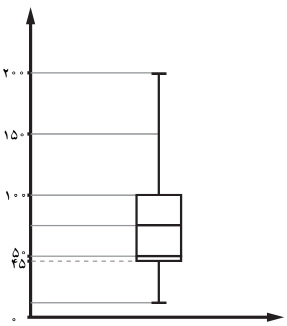
۱ـ Linear Chart

نمودار جعبه‌ای: نمودار جعبه‌ای برای متغیرهای کمی پیوسته یا متغیرهای کمی گسسته با دامنه تغییرات بزرگ رسم می‌شود. همان‌طور که روی شکل مقابل دیده می شود این نمودار کمینه، بیشینه، چارک اول و یا چارک سوم و میانگین را نمایش می‌دهد.

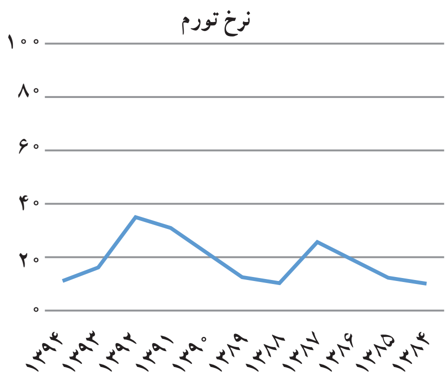


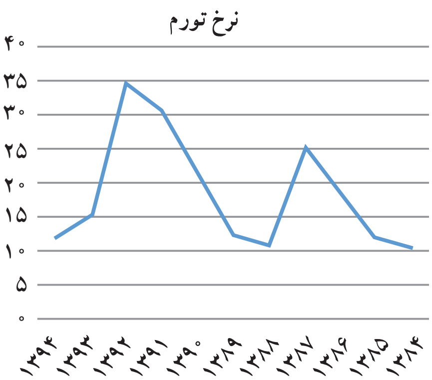
کار در کلاس ۱۱

نمودار جعبه‌ای مقابل داده‌های مربوط به مدت زمان استفاده از اینترنت در کار در کلاس ۱۰ است. مقادیر کمینه، چارک اول، میانگین، چارک سوم، بیشینه مدت زمان استفاده از اینترنت را محاسبه و با نمودار مقابل مقایسه کنید.



در استفاده از نمودارها، توجه به درجه‌بندی محورهای افقی یا عمودی، اعداد و ارقام مربوط به آنها مهم‌تر از شکل نمودارها است. دو نمودار زیر نرخ تورم را در سال‌های ۱۳۹۴ـ ۱۳۸۴ نشان می‌دهند. نوسانات شاخص تورم در کدام نمودار بیشتر است؟





تمرین‌های درس سوم

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید؟

ــ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ــ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر، بزرگ‌تر می‌شود.

ــ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود.

ــ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر، ثابت می‌ماند.

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می کند میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر می باشد. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

0086

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

۴ مدیر یک فروشگاه زنجیره‌ای می‌خواهد نوشیدنی‌های خود را بر اساس سلیقه مشتریان انتخاب کند لذا از ۸۰ مشتری خود می‌پرسد : نوشیدنی مورد علاقه آنها چیست؟ پاسخ آنها در جدول زیر گزارش شده است :

نوشابه	ماءالشعیر	دوغ	دوغ	آب میوه	آب میوه	دوغ	دوغ	نوشابه	ماءالشعیر
دوغ	دوغ	دوغ	آب میوه	آب میوه	آب میوه	ماءالشعیر	ماءالشعیر	آب میوه	آب میوه
آب میوه	آب میوه	آب میوه	آب میوه	دوغ	دوغ	دوغ	نوشابه	نوشابه	نوشابه
آب میوه	آب میوه	نوشابه	نوشابه	نوشابه	ماءالشعیر	ماءالشعیر	آب میوه	آب میوه	آب میوه
دوغ	ماءالشعیر	ماء لشعیر	ماءالشعیر	آب میوه	آب میوه	دوغ	دوغ	دوغ	دوغ
آب میوه	آب میوه	آب میوه	آب میوه	ماءالشعیر	ماءالشعیر	ماءالشعیر	آب میوه	آب میوه	آب میوه

ــ برای کمک به مدیر فروشگاه در خلاصه‌سازی داده‌ها جدول فراوانی را رسم نمایید.

ــ چه نمودار(یا نمودارهایی) می‌تواند نمایش ساده‌تری از داده‌ها نشان دهد؟

0087

۵ در یک کار پژوهشی بهداشت دهان و دندان از ۴۰ دانش‌آموز پرسیده شد : در یک شبانه‌روز چند بار مسواک می‌زنند؟ پاسخ آنها در جدول زیر گزارش شده است :

۲ ۳ ۱ ۰ ۲ ۳ ۳ ۳ ۳ ۲ ۱ ۳ ۲ ۳ ۲ ۱ ۲ ۱ ۲ ۰

۲ ۳ ۱ ۴ ۲ ۱ ۲ ۵ ۳ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۲ ۳ ۲ ۰ ۰ ۰

ــ برای کمک به مجری پژوهش در خلاصه‌سازی داده‌ها جدول فراوانی را رسم نمایید.

ــ چه نمودار(یا نمودارهایی) می‌تواند نمایش ساده‌تری از داده‌ها را نشان دهد؟

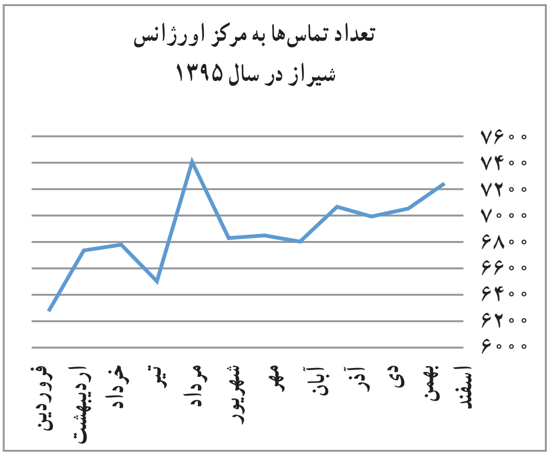
۶ معلم ریاضی می‌خواهد نمره ریاضی دانش‌آموزان پایه یازدهم رشته تجربی و انسانی را مقایسه کند. برای کمک به معلم ریاضی

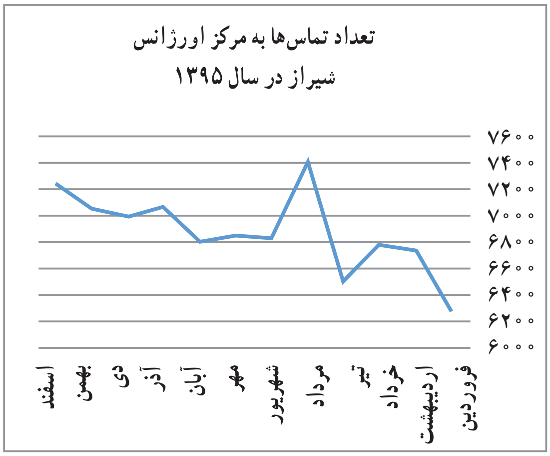
ــ ابتدا نمره دانش آموزان دو کلاس را ثبت نمایید.

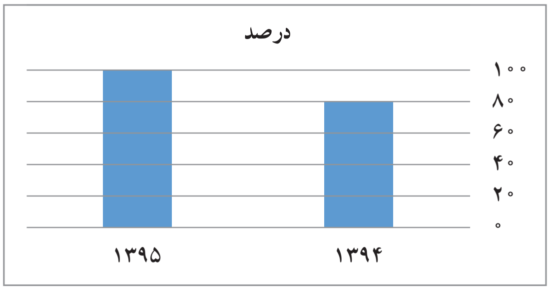
ــ جدول فراوانی دو کلاس را به تفکیک دو رشته با گروه‌های [۱۷,۲۰] , (۱۴,۱۷] , (۱۰,۱۴] ,(۰,۱۰] رسم نمایید.

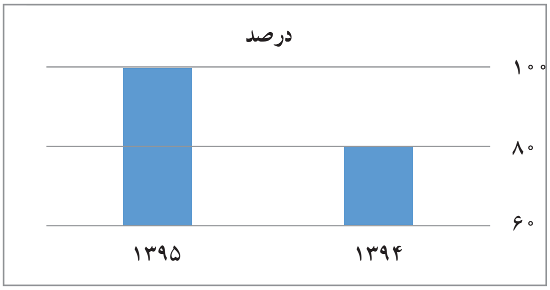
ــ چه نمودار(یا نمودارهایی) می‌تواند نمایش ساده تری از داده‌ها به تفکیک دو رشته را نشان دهد؟

۷ هر جفت از نمودارهای زیر، اگر چه در ظاهر متفاوت به نظر می‌رسند اما بیانگر اطلاعات یکسانی هستند. علت را تشریح نمایید.









شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارهای شهرنشین ایرانی به مصرف می‌رسد. این شاخص به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به‌شمار می‌رود. برای محاسبه شاخص تورم، سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبه شاخص تورم از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$I_{t,0} = \frac{P_t^i Q_t^i + P_t^{۱۳۸۵} Q_t^{۱۳۸۵}}{P_0^i Q_0^i + P_0^{۱۳۸۵} Q_0^{۱۳۸۵}} \times ۱۰۰$$

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t

P_t^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان t

P_0^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان پایه

Q_t^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان t

Q_0^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان پایه

برای محاسبه نرخ تورم (Inf_t) از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$\mathrm{Inf}_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

سال	شاخص تورم	نرخ تورم
۱۳۸۴	۳۹/۸۰	۱۰/۴
۱۳۸۵	۴۴/۵۳	۱۱/۹
۱۳۸۶	۵۲/۷۴	۱۸/۴
۱۳۸۷	۶۶/۱۲	۲۵/۴
۱۳۸۸	۷۳/۲۳	۱۰/۸
۱۳۸۹	۸۲/۳۱	۱۲/۴
۱۳۹۰	۱۰۰/۰۰	۲۱/۵
۱۳۹۱	۱۳۰/۵۴	۳۰/۵
۱۳۹۲	۱۷۵/۸۸	۳۴/۷
۱۳۹۳	۲۰۳/۲۴	۱۵/۶
۱۳۹۴	۲۲۷/۴۶	۱۱/۹

که I_t شاخص تورم در سال موردنظر و I_{t-1} شاخص تورم در سال قبل از آن است. در جدول بالا شاخص و نرخ تورم سال‌های ۱۳۹۴ـ۱۳۸۴ را ملاحظه می‌کنید.

پیش نویس ریاضی ۲ تجربی پایه یازدهم

فصل ۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل ۲ هندسه

فصل ۳ تابع

فصل ۴ مثـــلثات

فصل ۵ توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۶ حد و پیوستگی

فصل ۷ آمار و احتمال