حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

فصل ۳

آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به‌وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به‌طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

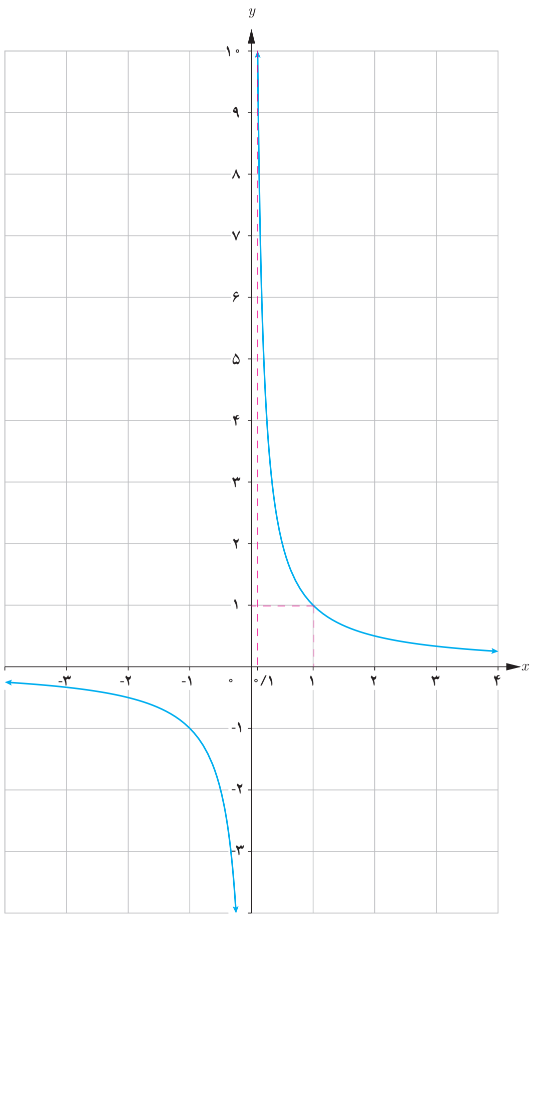
درس ۱

حدهای نامتناهی

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت

در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x=0$ بررسی کنیم.



۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\dots \longrightarrow$	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...	$\dots \longrightarrow$	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

✤ **تذکر** : این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

کار در کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	$-\frac{1}{2}$	$-0/2$	$-0/1$	$-0/001$	$-0/0001$	$-0/00001$	$\dots \longrightarrow$	۰
$f(x)$				-1000			$\dots \longrightarrow$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از -10^6 کوچک‌تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

ت) در مورد $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟

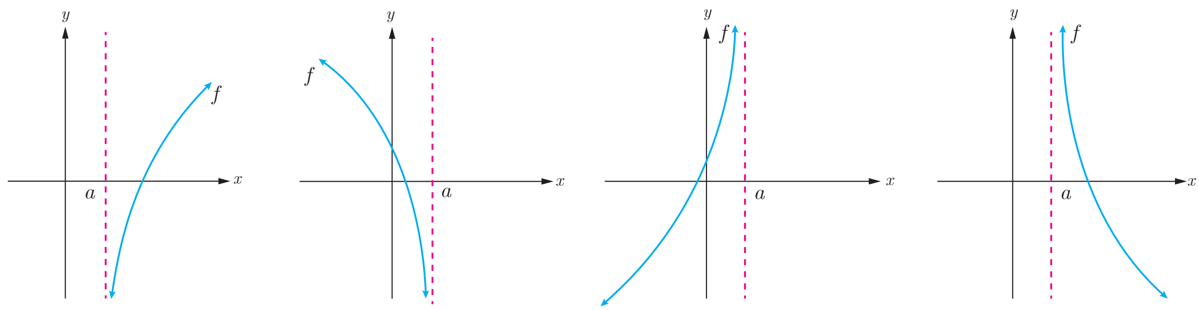
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

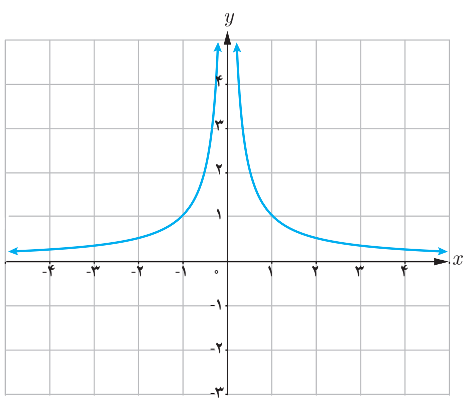
همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ بدین‌معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکر : تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثال : نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x=۰$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید :



x	$-۰/۵$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$۰۰۰ \rightarrow$	۰	$\leftarrow ۰۰۰$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۵$
$f(x)$					$۰۰۰ \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow ۰۰۰$				

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می‌توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی‌شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱}{|x|}=+\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حدّ در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و مقدار تابع خیلی کوچک‌تر می‌شود در زیر وجود دارد.

تعریف :

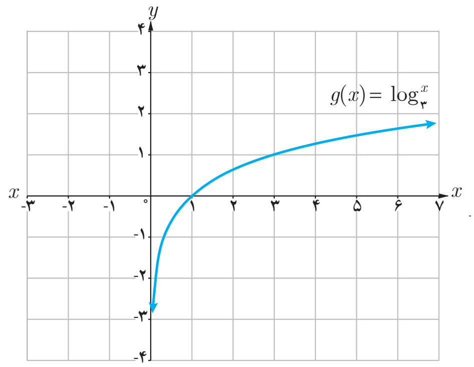
فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثال : برای حدّ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ در نقطه $x=۰$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$.

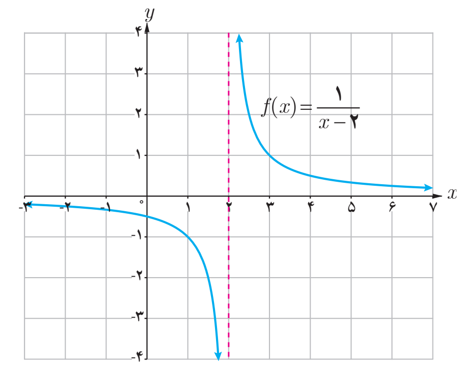
مثال : در مورد حد تابع $f(x)=\dfrac{۱}{|x|}$ در نقطه $x=۰$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۱}{|x|}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{۱}{|x|}=+\infty$

کار در کلاس

نمودار توابع f، g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

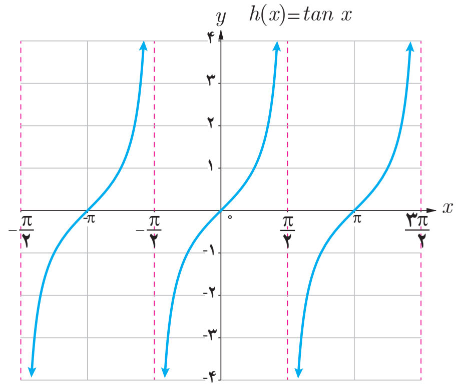


$$\lim_{x\to ۰^+} g(x)=\cdots$$



$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\cdots$$



$$\lim_{x\to (-\frac{\pi}{۲})^+} h(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} h(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} h(x)=\cdots$$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به‌کار می‌رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به‌صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x\to\infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x\to\infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت[۱]

قضیه ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{عددی زوج باشد، } n \\ -\infty & \text{عددی فرد باشد، } n \end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

قضیه ۲ : الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

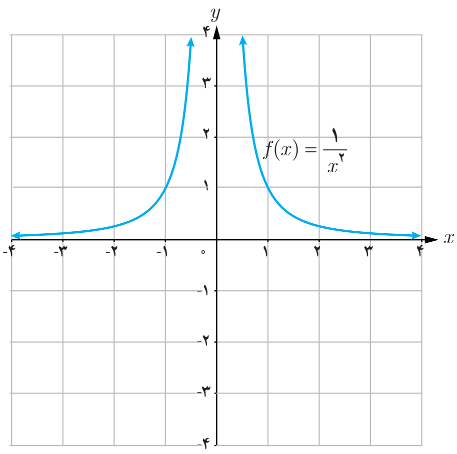
ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

مثال : $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$

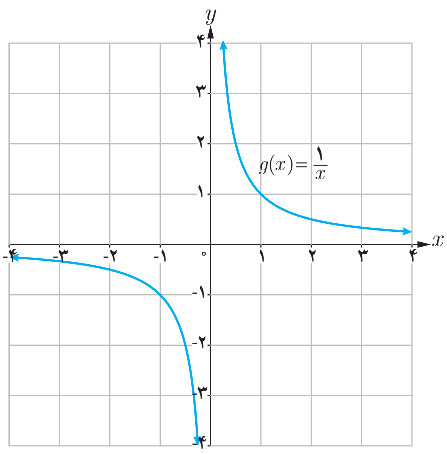
کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$



ب) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$



۱ــ ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی‌کنیم.

قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^{+}$ یا $x\to a^{-}$ نیز برقرار است.

مثال : هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله تابعی، با ضابطه $f(x)=\dfrac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب **میلیون تومان** است دامنه تابع $[۰, ۱۰۰)$ می‌باشد.

مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه ۶۳/۷۵ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(۹۵)=۴۸۴۵$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با توجه به قضیه فوق داریم : $\lim\limits_{x\to ۱۰۰^{-}}\dfrac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}=+\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صددرصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.

سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x+۱}{۴-x^{۲}}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که $۴-x^{۲}=(۲-x)(۲+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} x+۱=۳$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x+۱}{۴-x^{۲}}=+\infty$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}$ را به‌دست آورید.

حل : وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -۱ و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}=-\infty$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to (-۱)^-}\frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید و چون $x\neq -۱$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x+۱$ تقسیم کرد.
داریم :

$$\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}=\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{(x+۱)^۲}=\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{x}{x+۱}=+\infty$$

کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{۱-x}{x+۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}$

قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ (و یا $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$) آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=۰$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{x+۱}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس‌های قبل به‌صورت شهودی دیده شد که : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\tan x=+\infty$ از طرفی

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}(x+۱)=\frac{\pi}{۲}+۱$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{x+۱}{\tan x}=۰$

فعالیت

۱ توابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ را به‌دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\big((f+g)(x)\big)$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛[1]

الف) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big)=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big)=-\infty$

تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1+\dfrac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱ــ این قضیه در حالت $l=0$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $\infty-\infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

کار در کلاس

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$

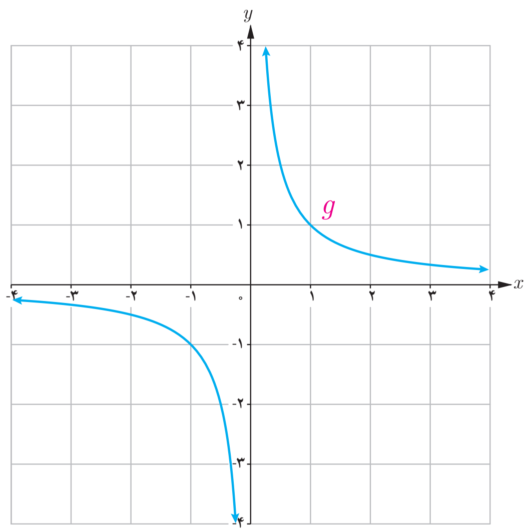
ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x^2}$

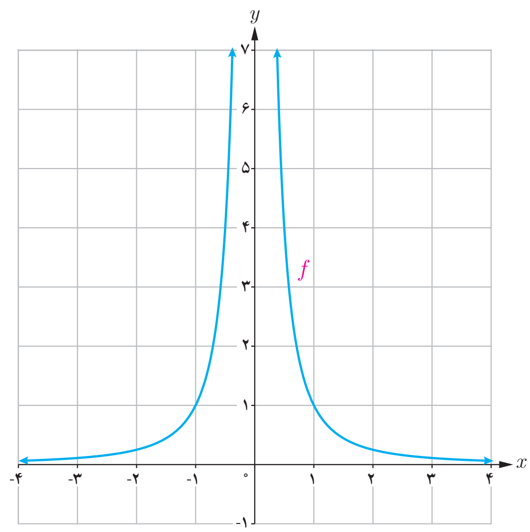
پ) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$

ت) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-\cos 2x}{x}$

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.





$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$ خط $x=0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

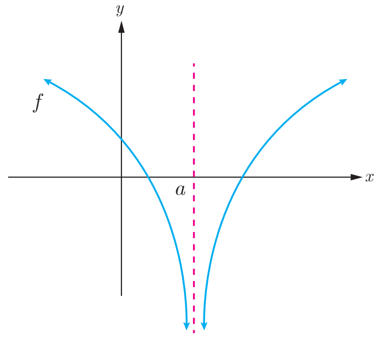
تعریف :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

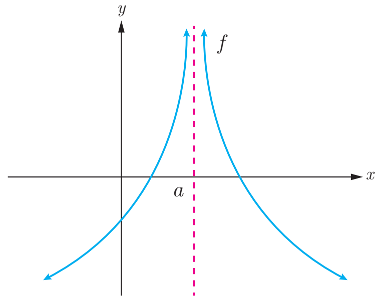
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثال : در هر یک از شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



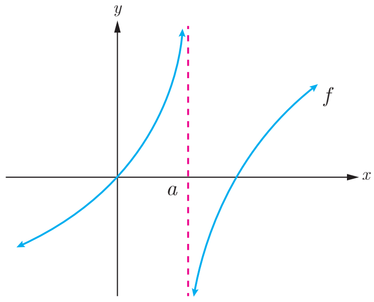
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



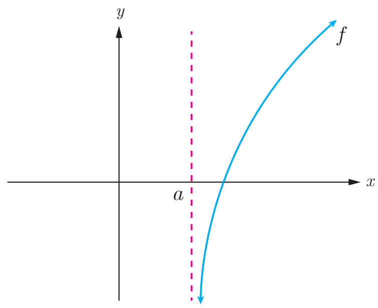
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

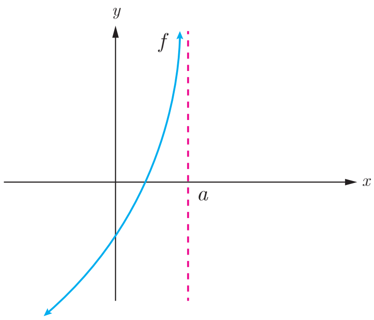


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

مثال : کدام‌یک از خطوط $x=-۱$ و $x=۳$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}$ می‌باشند؟

حل : شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=-\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=+\infty$ می‌توانستیم بگوییم $x=-۱$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}$$

خط $x=۳$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به‌صورت $x=-۱$ دارد.

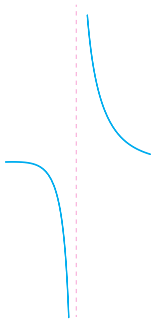
مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

حل :

$$f(x)=\frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.



کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

بندر چابهار (عکاس: سیدمهدی حسینی)

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{۲x}{x^۲-۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{۹-x^۲}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱\,,۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲\,,۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

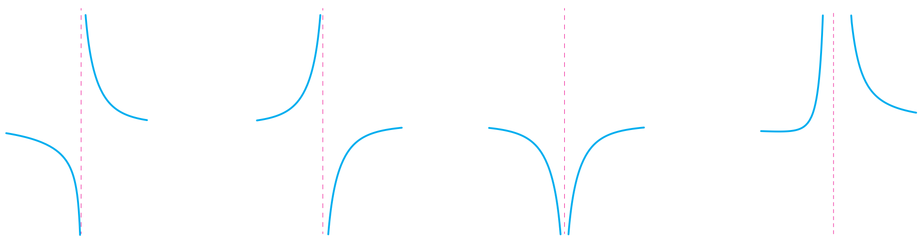
۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}$

۶ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}$ را در همسایگی $x=۱$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

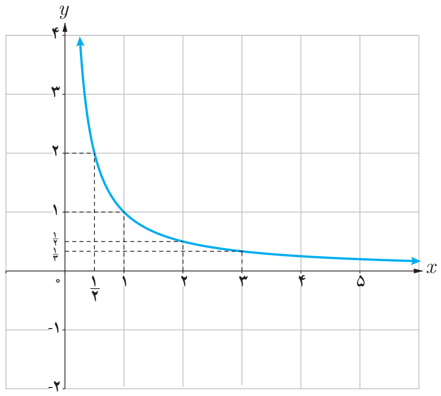
درس ۲

حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه $(0\ ,+\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	10^3	10^5	10^6
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	...	...	...	...	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

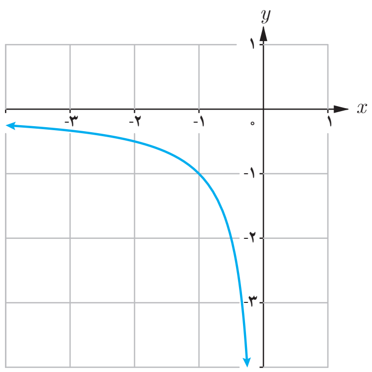
۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچک‌تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور xها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(-\infty\,,\,۰)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰	$-۱۰^{۳}$	$-۱۰^{۴}$	...
$f(x)$								...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{۱}{۳}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰^{۶}}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول بالا می‌توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (یعنی از هر عدد منفی کوچک‌تر) شود آن‌گاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$

تذکر : منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ قبل به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

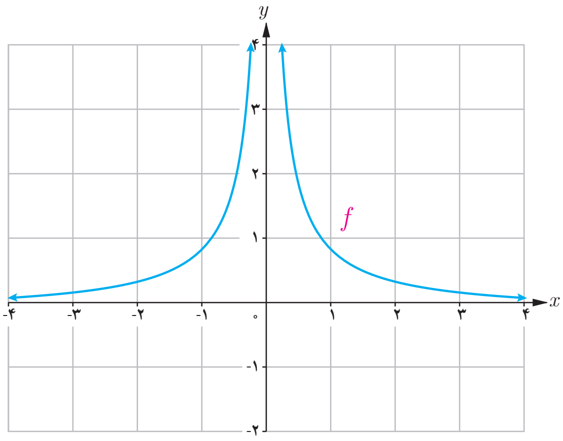
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty\,,a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

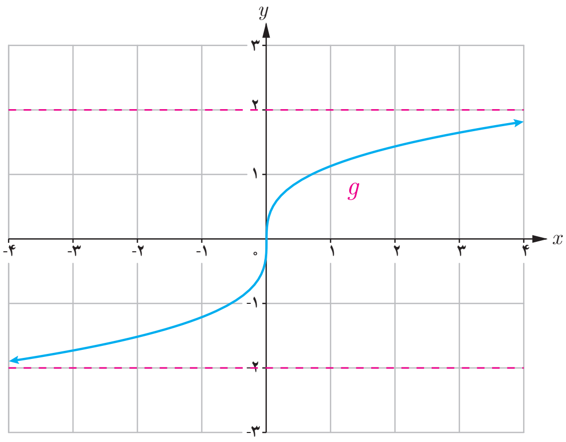
کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

قضیه ۶ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n} = ۰$

مثال : حاصل هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{۲}}{x^۲}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-۵}{۲x^۳}$ برابر صفر است.

قضیه ۷ : اگر $L_۱$ و $L_۲$ اعداد حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۲$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۱ \pm L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۱ L_۲$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲}$ (با فرض $L_۲ \neq ۰$)

تذکر : قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند نیز برقرار است.

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (۳ + \frac{۵}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲ + \frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x} + ۴}$

حل :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

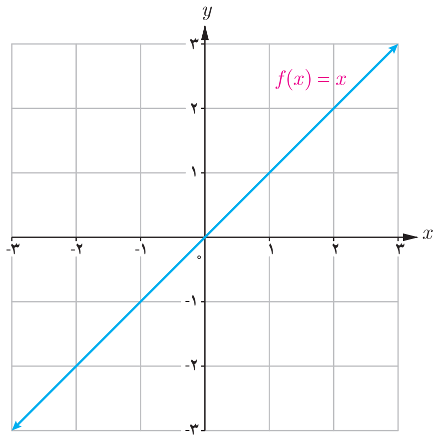
$$\lim_{x\to+\infty} (۳ + \frac{۵}{x^۳}) = \lim_{x\to+\infty} ۳ + \lim_{x\to+\infty} \frac{۵}{x^۳} = ۳ + ۰ = ۳$$

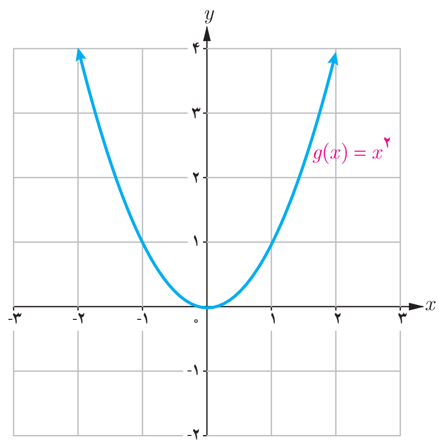
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲ + \frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x} + ۴} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} ۲ + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۵}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} ۴} = \frac{۲ + ۰}{۰ + ۴} = \frac{۱}{۲}$$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند. ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.





همچنین با کوچک شدن مقادیر x، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$


کوه تفتان، سیستان و بلوچستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

کار در کلاس

۱ مفاهیم $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.

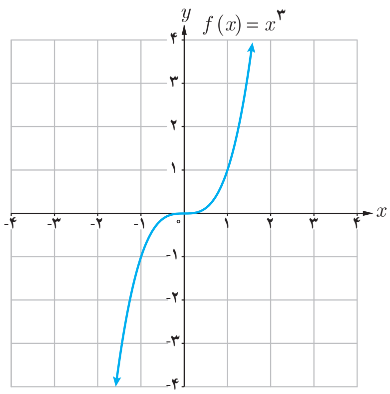
۲ با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^{2}$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim\limits_{x\to -\infty} x =$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2} =$

فعالیت

تابع $f(x) = x^{3}$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^{6}	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^{6}	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	$\dots$	$\dots$	-10^{6}	$\dots$	1	1000	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{3}$ چه می‌توان گفت؟

قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$

ب) اگر n فرد باشد : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty \end{cases}$

قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x).\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to-\infty} f(x).\lim_{x\to-\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^۳(-۲ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -۲x^۳ = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴} - \frac{۲}{x^۳} - ۵) = \lim\limits_{x\to+\infty} -۵x^۴ = -\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \dots + a_۱ x + a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \dots + a_۱ x + a_۰) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$

ب) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$

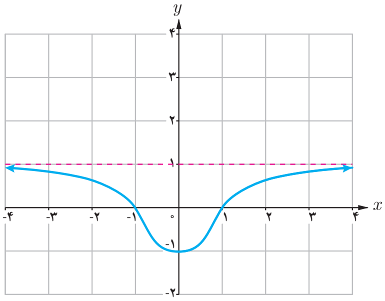
پ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$

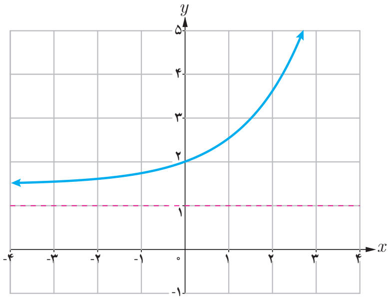
کوه‌های مریخی، چابهار

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = ۱$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟





مثال : مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ را به‌دست آورید.

حل : برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم :

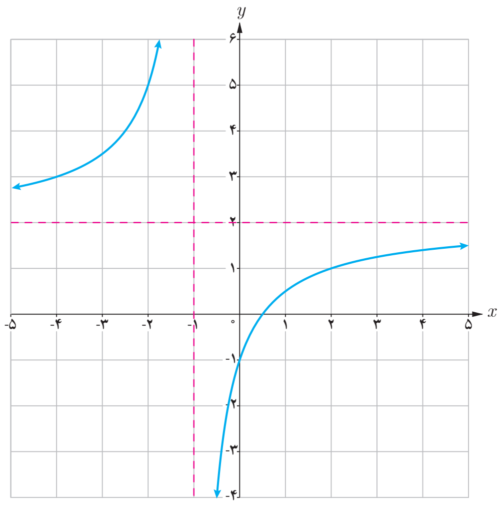
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x-۱}{x+۱} = ۲$$

پس خط $y = ۲$ مجانب افقی تابع است.

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -۱$ مجانب قائم تابع است زیرا :

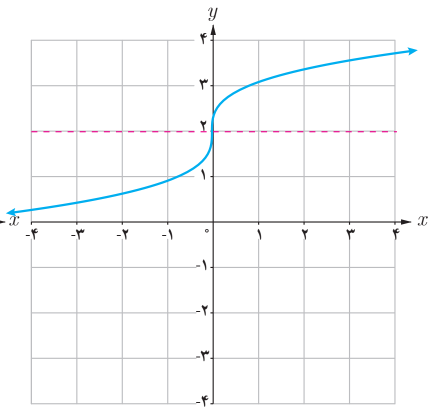
$$\lim_{x\to-۱^+} \frac{۲x-۱}{x+۱} = -\infty$$

نمودار تابع به‌صورت زیر است.

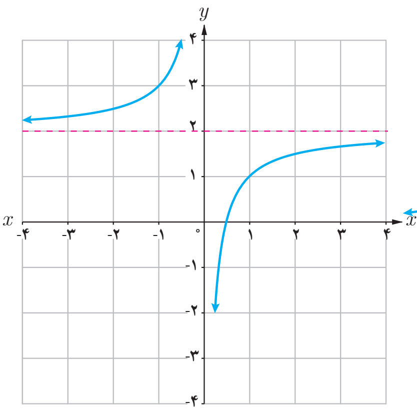


کار در کلاس

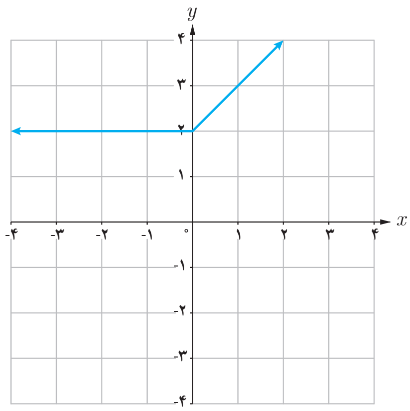
۱ کدام‌یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



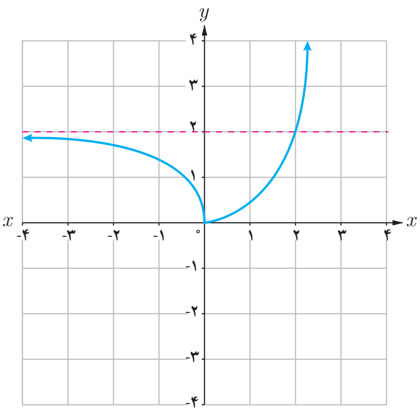
الف



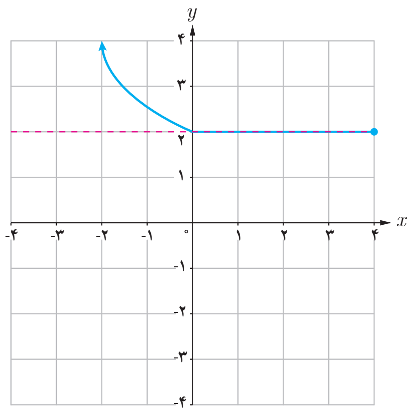
ب



پ



ت



ث

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

ب) $g(x)=x^3$

پ) $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

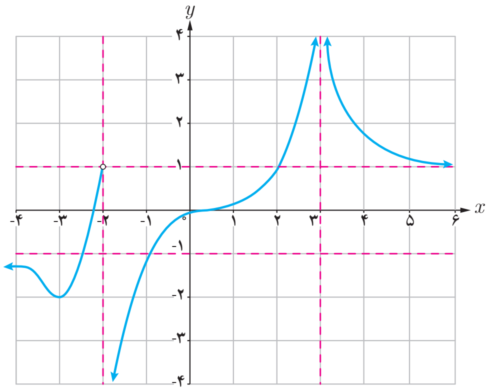
تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

۳ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۳x+۵}{x-۲}$

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^۳-۲x^۲)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

ت) $y=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty \ , \ \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-\infty$

پ) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.