درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

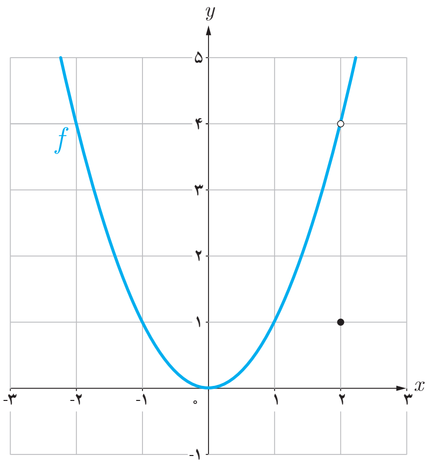
در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(۲)$ وجود ندارد؟

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=۲$ تعریف مشتق f در $x=۲$ را به‌کار گیریم :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \to ۲$، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = -\infty$$

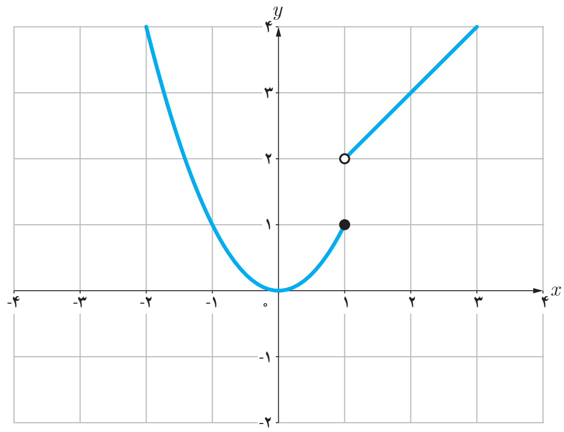
بنابراین $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(۲)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x = ۲$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۱ \\ x + ۱ & x > ۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟



توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = ۲$ و $x = ۱$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(۲)$ و $g'(۱)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=۰.f'(a)=۰$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=۰$ و از آنجا $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

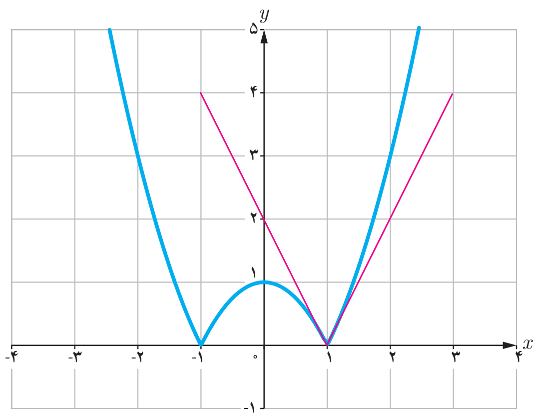
$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}$$

برای محاسبه $f'(۱)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}=-۲$$

بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲− است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=۱$ می‌نامیم و با $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ نمایش می‌دهیم.



در مثال قبل f در $x=۱$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت :

$f'_-(۱)$ = شیب نیم‌مماس چپ

$f'_+(۱)$ = شیب نیم مماس راست

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از :

نیم مماس راست $y-\circ=۲(x-۱)$ یا $y=۲x-۲$ ، $x\geq ۱$

نیم مماس چپ $y-\circ=-۲(x-۱)$ یا $y=-۲x+۲$ ، $x\leq ۱$

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

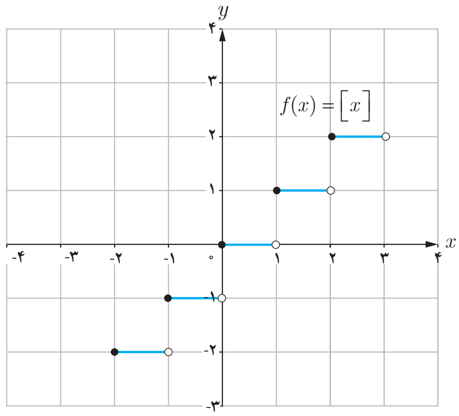
تعریف : مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

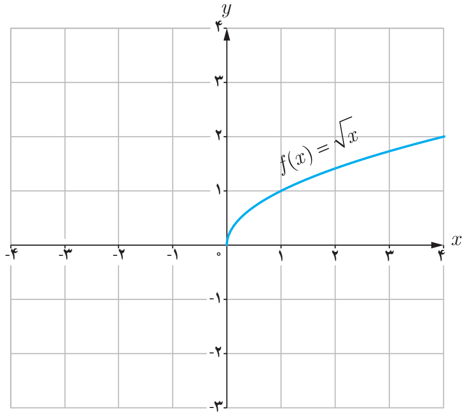
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل :

$$f'_+(a)=\lim_{h\to \circ^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to \circ^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

✤ **مثال :** توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(\circ)$ و $g'(\circ)$ موجود نیستند.

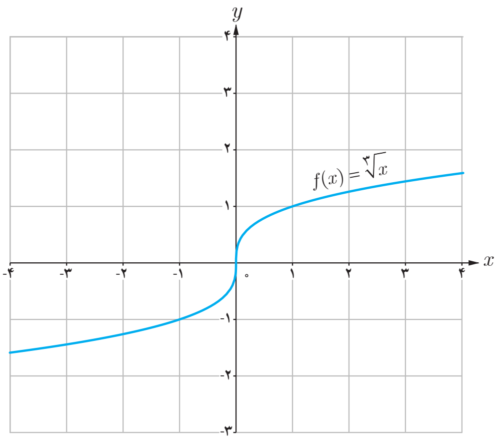




اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

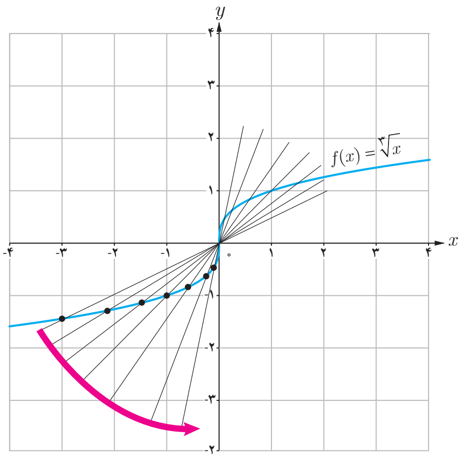
✤ **مثال :** تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=\circ$ بررسی کنید.

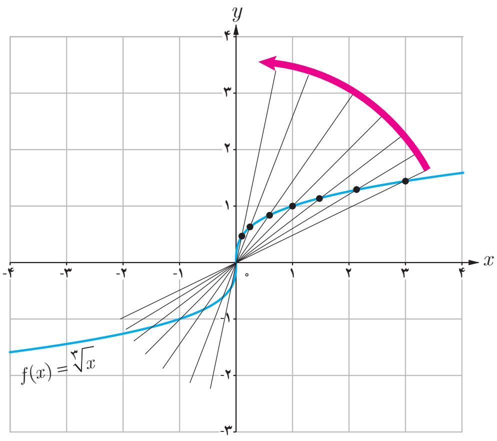
$$f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}-\circ}{x}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to\circ}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$



بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=\circ$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=\circ$ را «**مماس قائم**» منحنی می‌نامیم.





اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1].

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

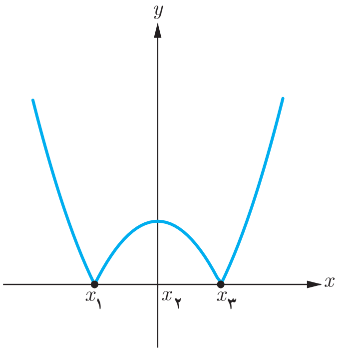
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

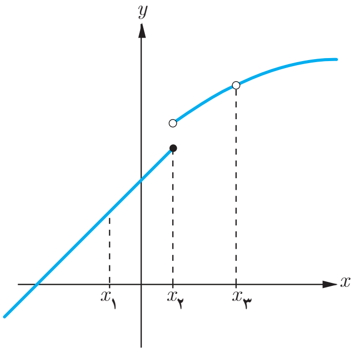
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

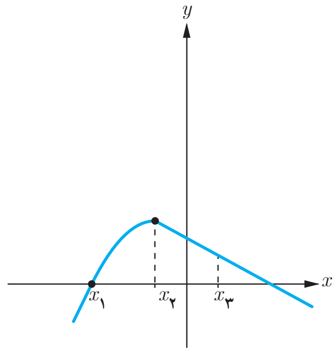
پ) هر دو نامتناهی باشند.

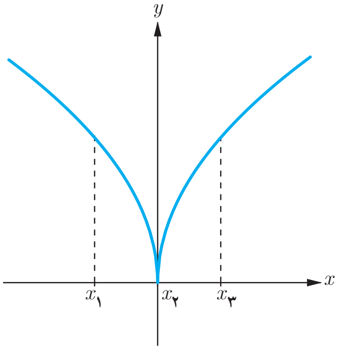
کار در کلاس

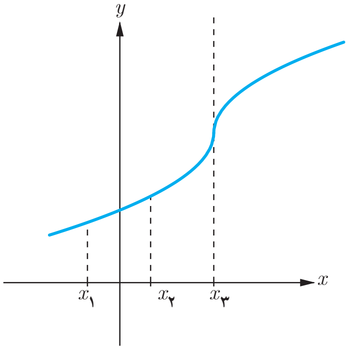
در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

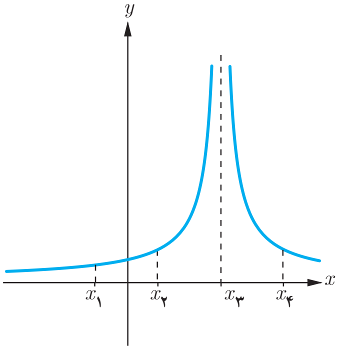










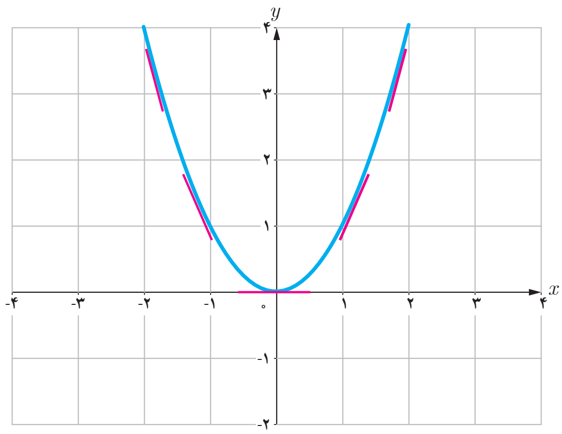


۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x)=x^{2}$ را درنظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}(x-۲)=-۴$$

$$f'(\sqrt{۳})=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{f(x)-f(\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{x^{۲}-۳}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{x}=۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^{۲}$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^{۲}$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}-x^{۲}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x^{۲}+۲hx+h^{۲}-x^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

بنابراین $f'(x)=۲x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^{۲}$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

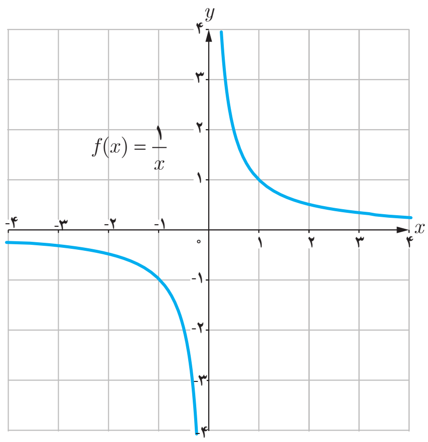
$$f'(-\frac{۱}{۵})=-\frac{۲}{۵}\ ,\ f'(\sqrt{۷})=۲\sqrt{۷}\ \text{ و }\ f'(۵۰)=۱۰۰$$

مثال : اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(۳)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=۳$.

حل : $f'(۰)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. اگر $x\neq ۰$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^{۲}}$$



با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(۳)=\frac{-۱}{۹}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x\neq ۰$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{۵})=\frac{-۱}{۵}$ و $f'(-۲)=-\frac{۱}{۴}$ ، $f'(۳)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳-x}{۳x}}{\frac{x-۳}{۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{۳x\cancel{(x-۳)}}=-\frac{۱}{۹}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

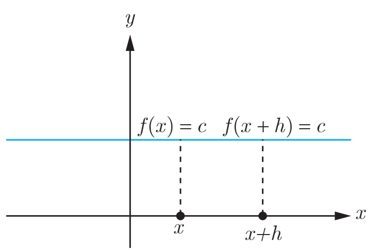
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

به‌طور مثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.



۲ اگر $n\in \mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x)=x^2$، آن‌گاه $f'(x)=2x$. همچنین اگر $f(x)=x^3$، به‌کمک این دستور نشان می‌دهیم که : $f'(x)=3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x)=x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)=x^3$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^2+x(x+h)+x^2\right]=x^2+x^2+x^2=3x^2$$

اکنون اگر $f(x)=x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{ بار}}=nx^{n-1}$$

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$.

✤ **مثال :** اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم : $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

۴* اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال : مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$ پ) $h(x)=\dfrac{x}{۲x^۲+x-۱}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم: $f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

اثبات: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(\sin x\frac{\cos h-۱}{h})+\lim_{h\to ۰}(\cos x\frac{\sin h}{h})$$

در حسابان (۱) دیدیم که:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}=۰\ ,\ \lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$$

بنابراین: $f'(x)=(\sin x)(۰)+(\cos x)(۱)$ و در نتیجه $f'(x)=\cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x)=\cos x$ داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)-\sin x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{(\cos h-۱)}{h}-\lim_{h\to ۰}\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$
$$=(\cos x)(۰)-(\sin x)(۱)=-\sin x\ \Rightarrow\ g'(x)=-\sin x$$

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به‌دست آورد.

مثال : مشتق $f(x)=\tan x$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin x\tan x$

ب) $g(x)=\frac{5\cos x}{1-\sin x}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)$$

مثال : اگر $h(x)=(x^2+3x+1)^7$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x)=x^7$ و $g(x)=x^2+3x+1$. آن‌گاه : $h(x)=f\big(g(x)\big)$

$$h'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)=(2x+3)\,f'\big(g(x)\big)$$

اگر $g(x)=u$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)=u^7\ \Rightarrow\ f'(u)=7u^6=7\big(g(x)\big)^6=7(x^2+3x+1)^6$$

بنابراین :

$$h'(x)=(2x+3)\,(7)\,(x^2+3x+1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد،

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y=f(u)\ \Rightarrow\ y'=u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y=\sin^2 x$ را به‌دست آورید.

حل : با فرض $\sin x=u$ داریم : $y=u^2$ و از آنجا :

$$y'=u'\,.\,2u=(\cos x)(2)(\sin x)=2\sin x\cos x$$

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ب) $g(x)=\cos^{۳}x$

پ) $h(x)=\sin(۳x^{۲}+۵)$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

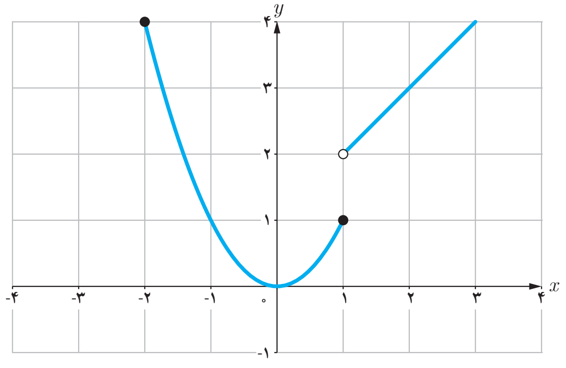
تابع f روی بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a\ ,\ b)$ و $(a\ ,\ b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.
تابع f روی بازه $[a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...
تابع f روی بازه $(a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty\ ,\ +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

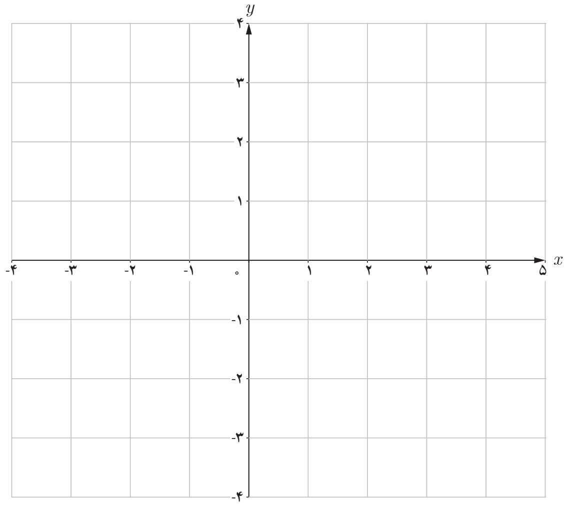
مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & -۲\leq x\leq ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.



f روی بازه‌های $[-۲\ ,\ ۱]$ و $(۱,\infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[۱\ ,\ ۲]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1 , 1]$، $(2 , 5)$ و $[-2 , 0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

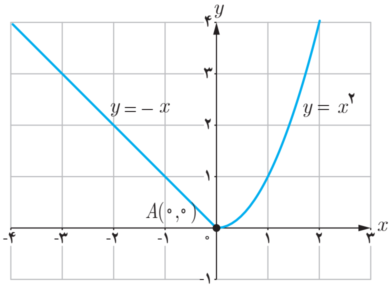
مثال : اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ آن‌گاه :

$$y' = 12x^3 + 4x \quad , \quad y'' = 36x^2 + 4$$

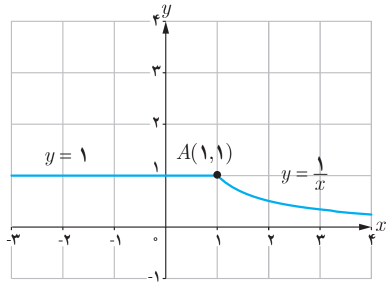
تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

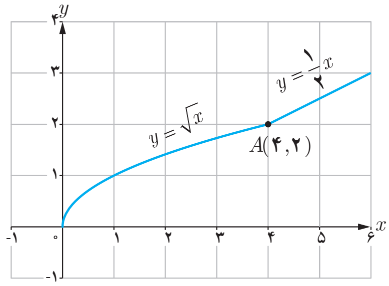
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

۳ تابع
$$f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$$
داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

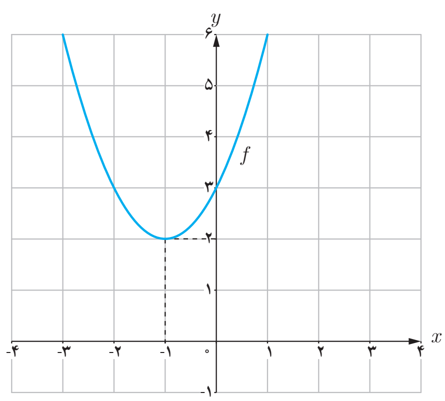
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

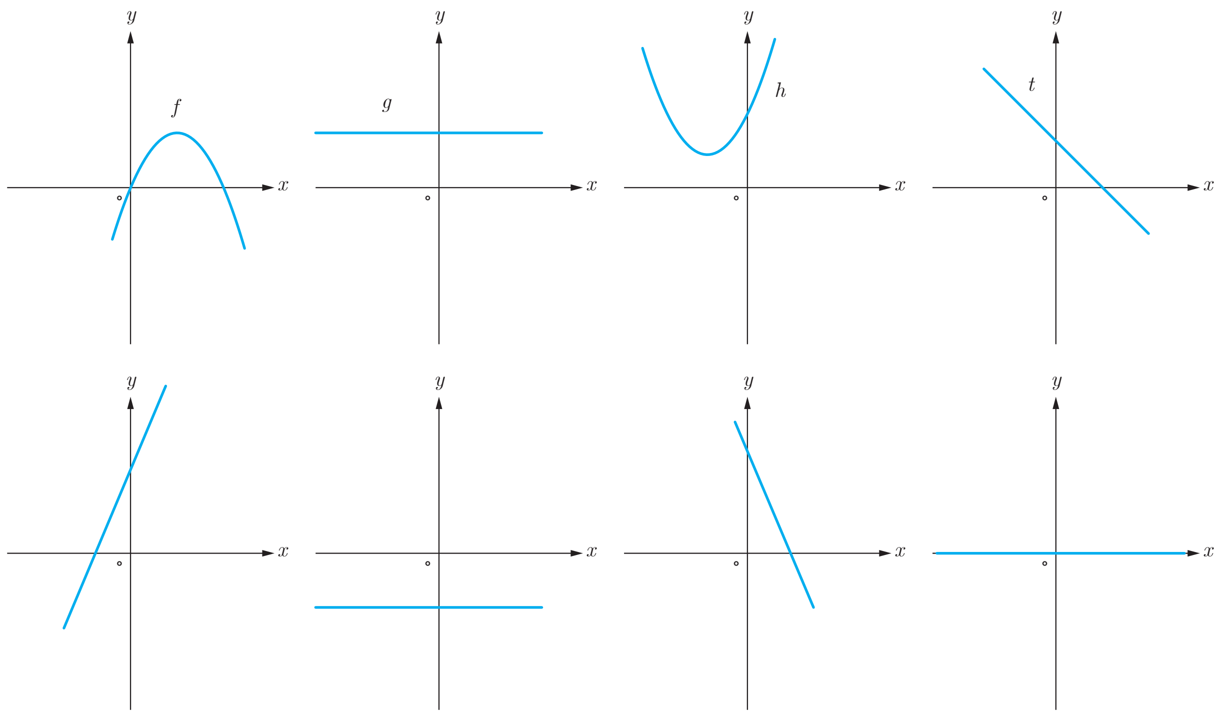


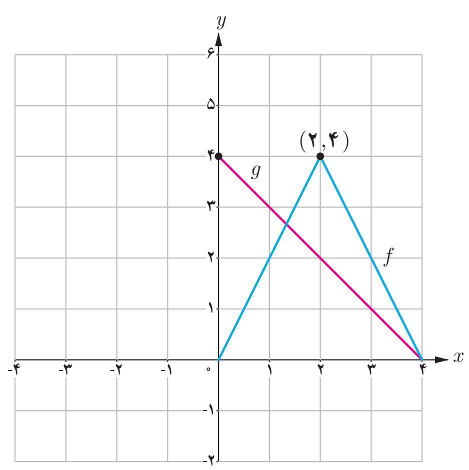
۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲− بررسی کنید.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)\,.\,g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۱ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$ مطلوب است.

۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

پ) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

ت) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$

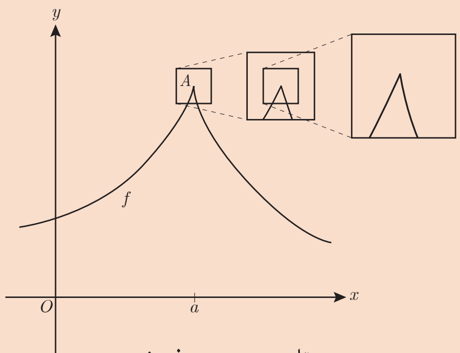
پ) $f(x)=\mathrm{tg}^2 x-2\cos x$

ب) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

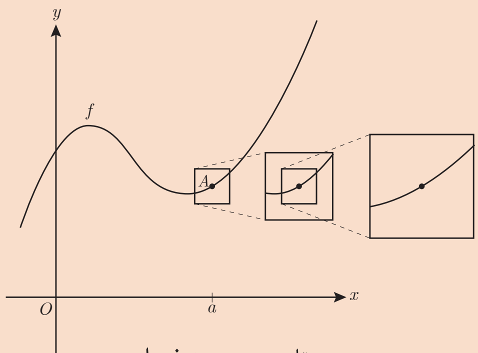
ت) $f(x)=\sin x\cos 2x$

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a\,,\,f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر نیست.



تابع در a مشتق‌پذیر است.