فصل

# ۱ تابع

عکاس: سیدمهدی حسینی

پل سفید ــ اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

درس اول

# توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

## توابع چند جمله‌ای:

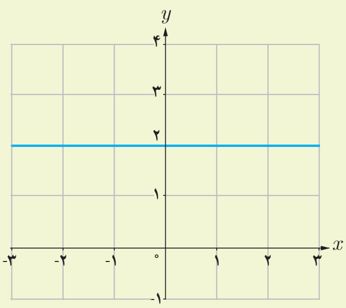
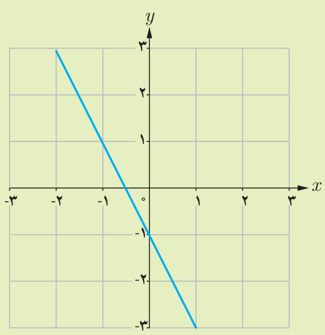
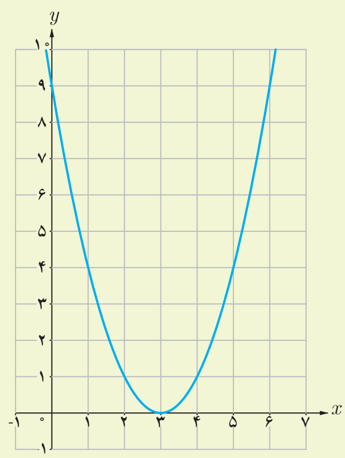
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n$، $a_{n-1}$، ...، $a_2$، $a_1$، $a_0$ اعداد حقیقی و $n$ یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ $n$ می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

**مثال :** توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

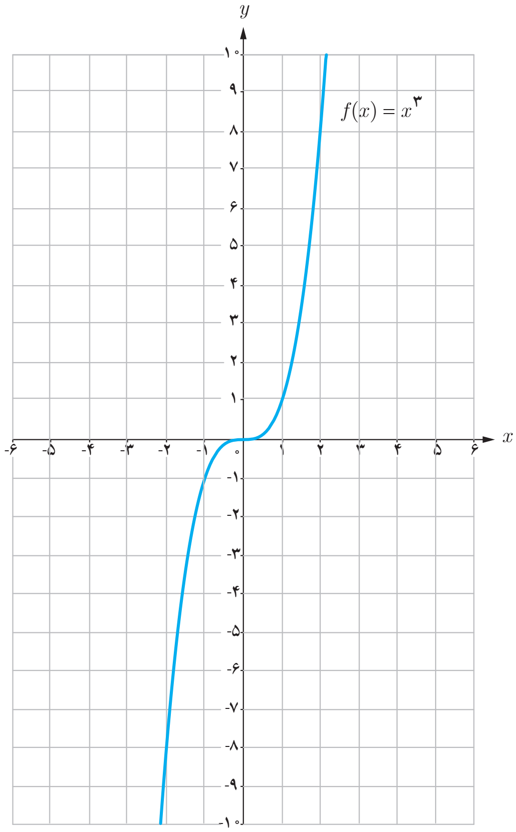
$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است :

| درجهٔ تابع | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| نام تابع | ثابت | خطی | درجهٔ دوم |
| ضابطهٔ کلی | $f(x)=b$ | $f(x)=ax+b$ <br> $(a\neq 0)$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ <br> $(a\neq 0)$ |
| مثال | $f(x)=2$ <br>  | $f(x)=-2x-1$ <br>  | $f(x)=x^2-6x+9$ <br>  |

### تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :




| $x$ | $f(x) = x^3$ |
|---|---|
| $-۲$ | $-۸$ |
| $-۱$ | $-۱$ |
| $-\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{۸}$ |
| ۰ | ۰ |
| $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۸}$ |
| ۱ | ۱ |
| ۲ | ۸ |

#### خواندنی

الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل به‌صورت یک شش‌ضلعی است که در دور اول با شش تا شش‌ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

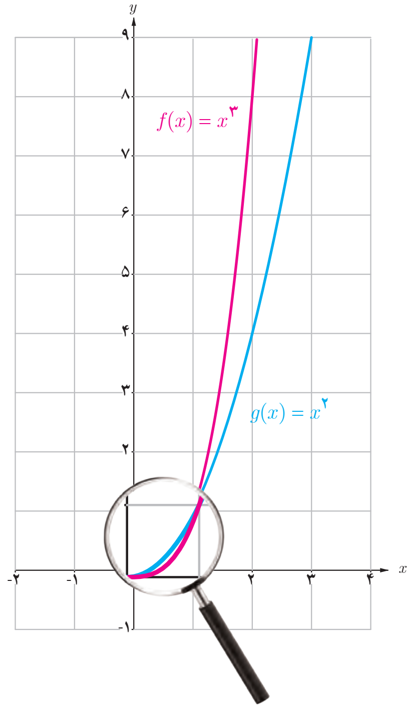
تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r)=۳r^2-۳r+۱$ به دست آورد که $r$ تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r=۱،۲،۳$ به دست آورید؟

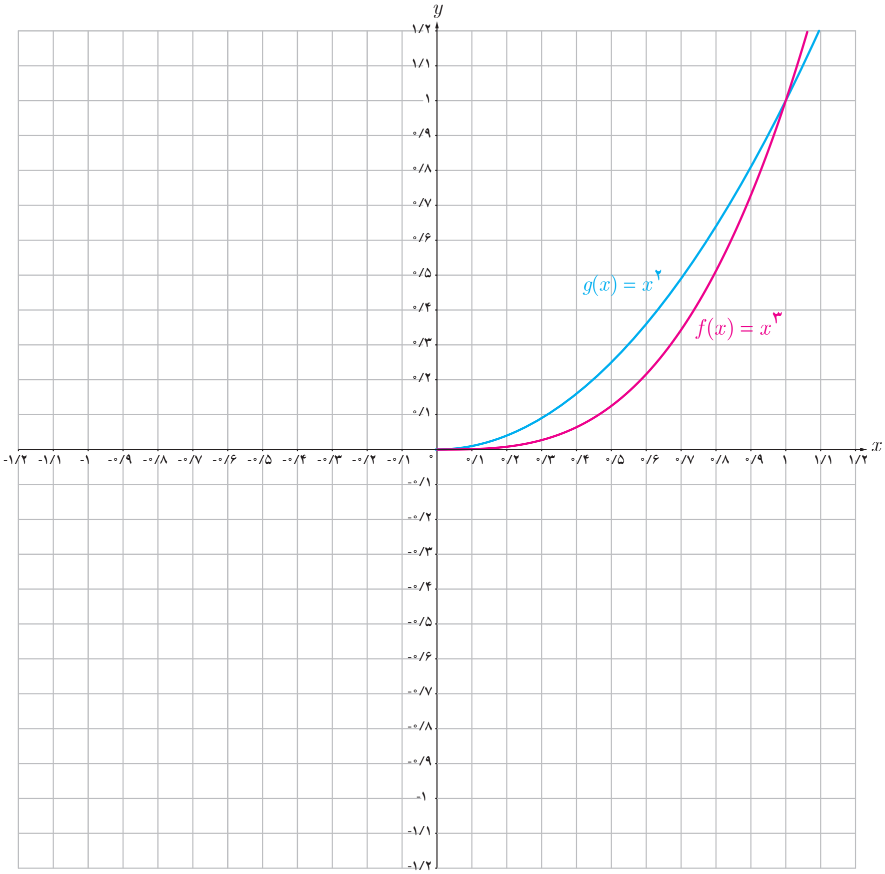
## فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

الف) آیا برای تمام $x$های نامنفی، نمودار $f(x)=x^3$ بالای نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟

ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1,0]$ رسم کنید.



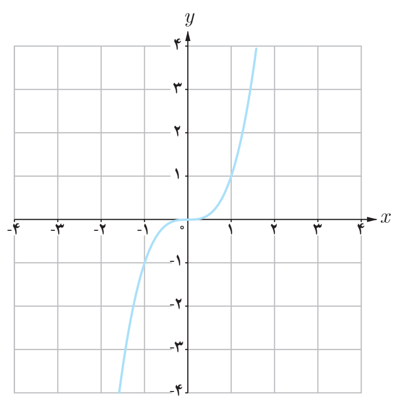

## فعالیت

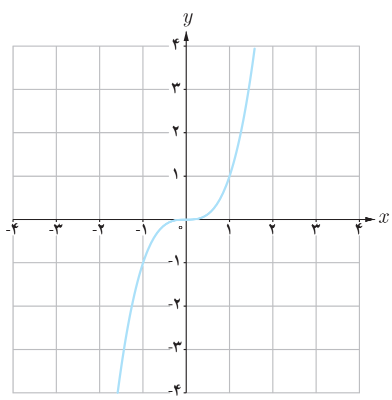
با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

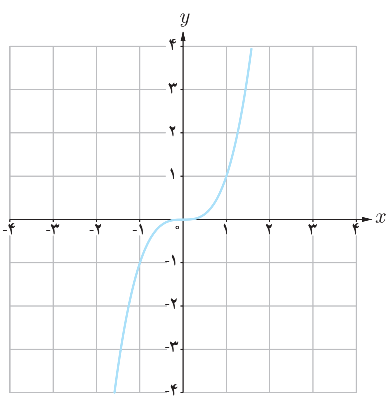
الف) $y=-x^3-2$

ب) $y=(x+2)^3$

پ) $y=-(x-2)^3$







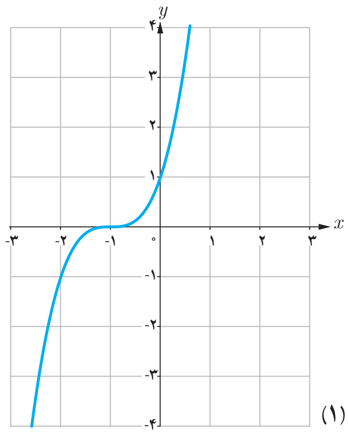
## کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y=x^۳$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

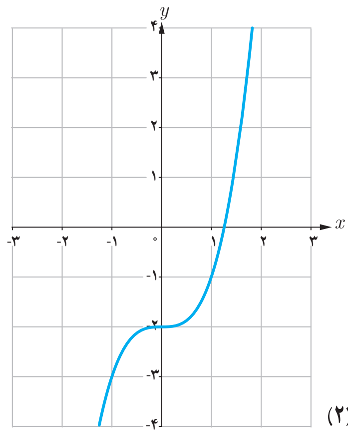
الف) $y=(x-۱)^۳+۲$ ب) $y=(x-۲)^۳$ پ) $y=-x^۳+۱$

ت) $y=(x+۱)^۳-۱$ ث) $y=-x^۳$ ج) $y=(x+۱)^۳$

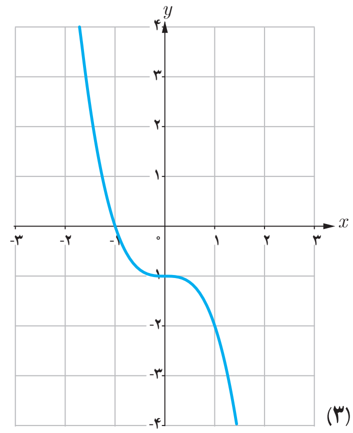
چ) $y=x^۳+۱$ ح) $y=-x^۳-۱$ خ) $y=x^۳-۲$



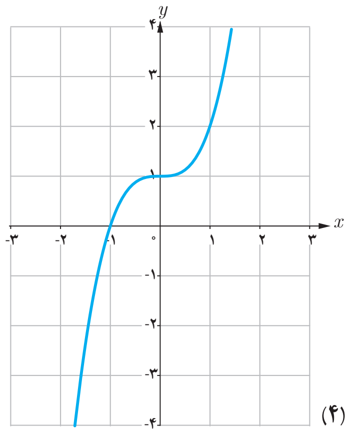
(۱)



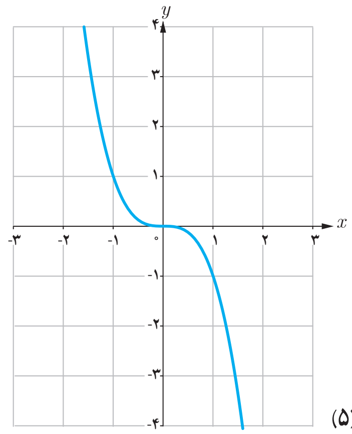
(۲)



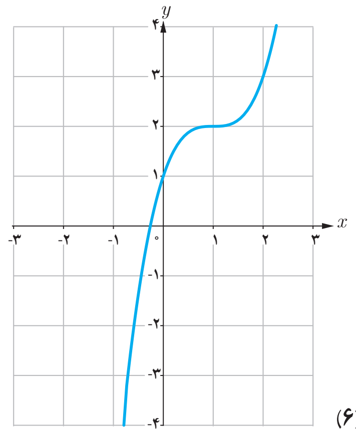
(۳)



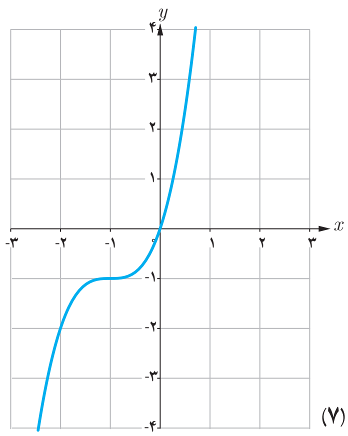
(۴)



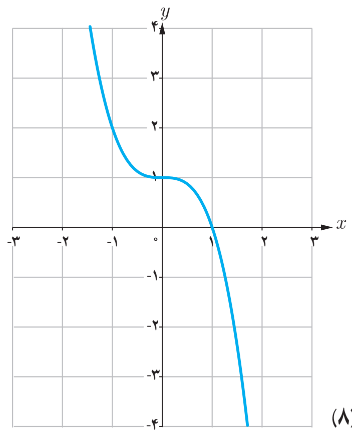
(۵)



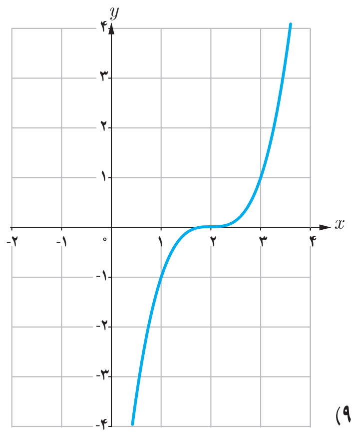
(۶)



(۷)



(۸)



(۹)

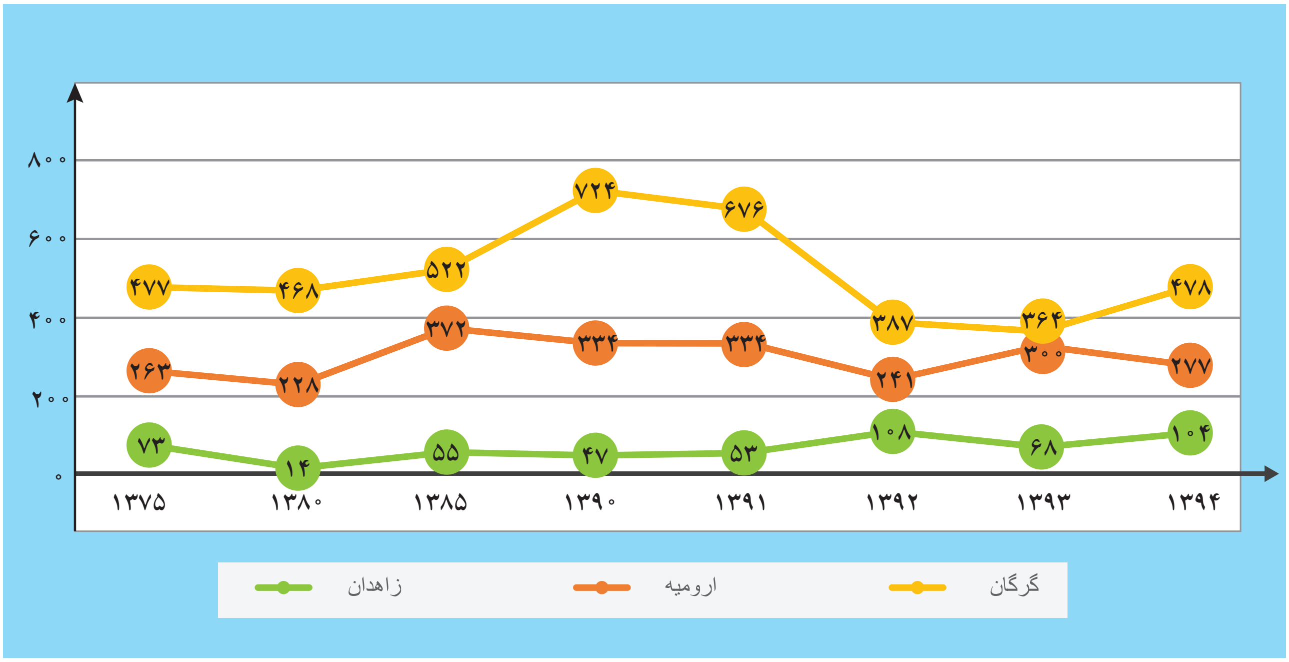
## توابع صعودی و توابع نزولی:

**فعالیت**

یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟



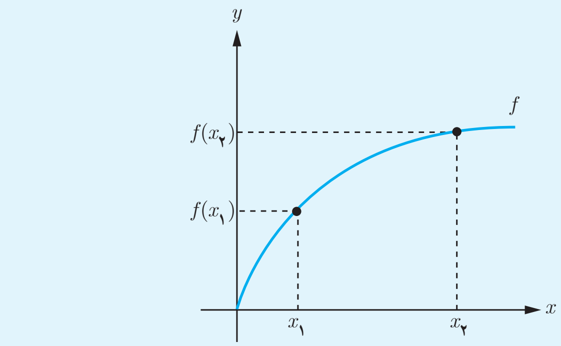

میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]

---

۱ــ منبع: سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir

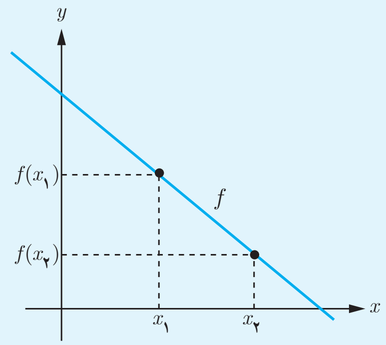
### تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



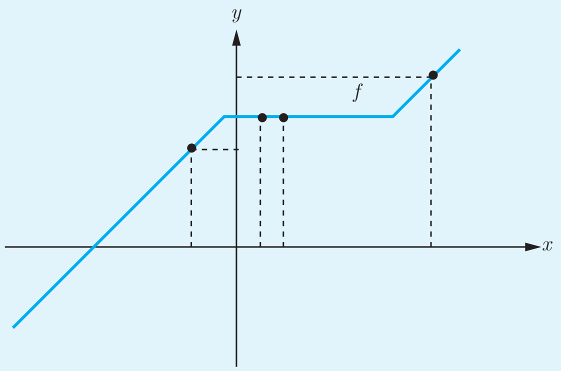

### تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



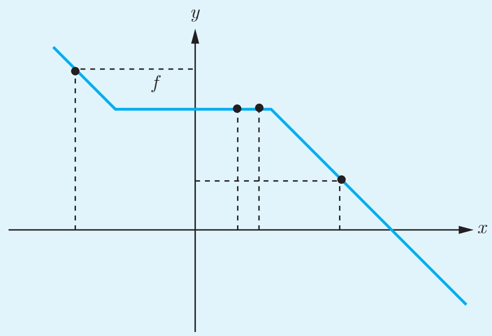

### تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی صعودی می‌نامیم.




### تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی نزولی می‌نامیم.

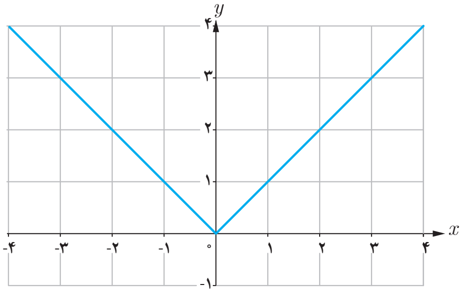



تابع $f$ را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر $x$ در این بازه، مقدار $f$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

**نکته** : به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

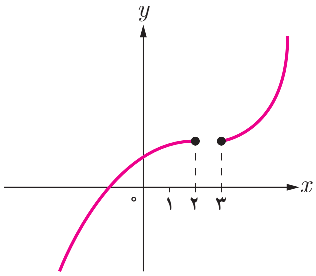
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

**مثال :** تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

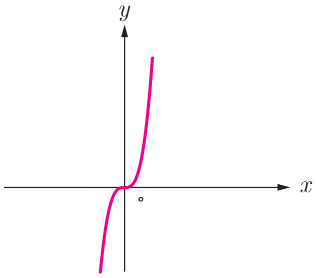



## کار در کلاس

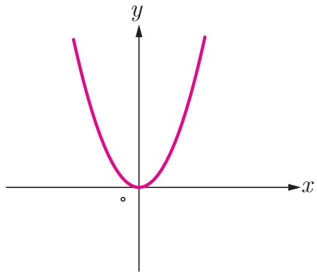
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



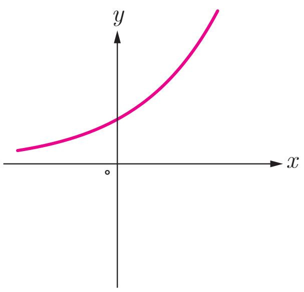

(الف)



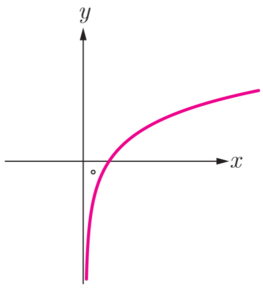

(ب)



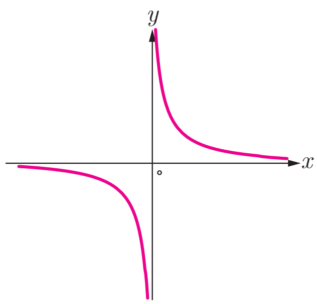

(پ)



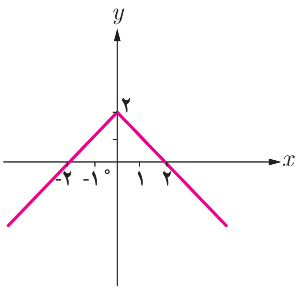

(ت)



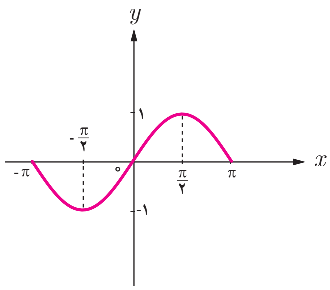

(ث)



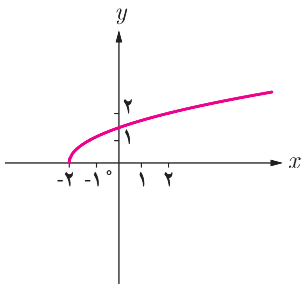

(ج)




(چ)



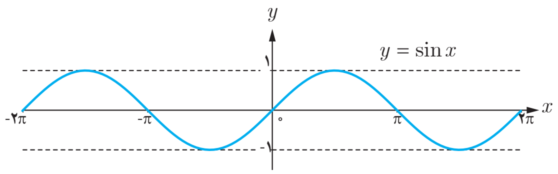

(ح)

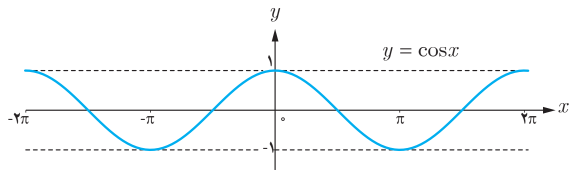



(خ)

**کار در کلاس**

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.




| $x$ | $[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$ | $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ | $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ | $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ | $[0, \frac{\pi}{2}]$ | $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ | $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | | | | | صعودی | | | |

| $x$ | $[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$ | $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ | $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ | $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ | $[0, \frac{\pi}{2}]$ | $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ | $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | | | | | | | صعودی | |

**کار در کلاس**

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ $\quad D_f = [0, 2\pi]$

ب) $g(x) = x + |x|$

پ) $t(x) = -x^3 - 1$

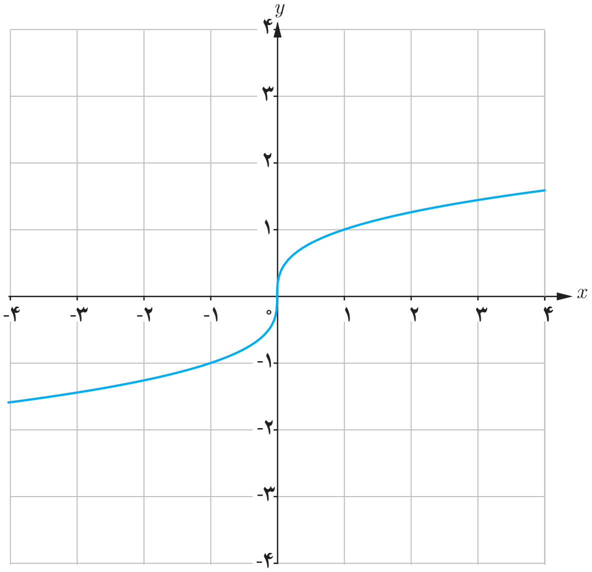
## فعالیت

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک به یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟




## تمرین

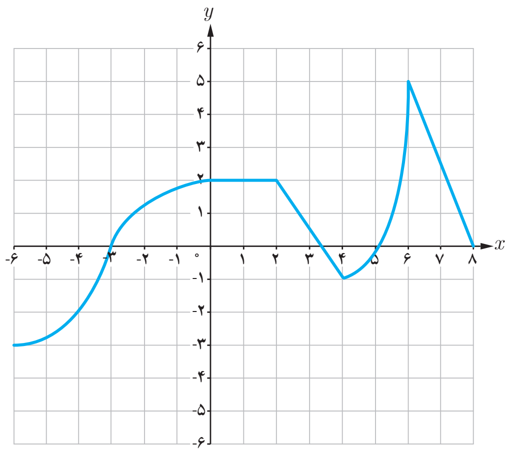
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-1)^3-1$ ب) $y=(x+2)^3-2$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-4 \\ 3 & -4\le x<2 \\ 3x-2 & x\ge 2 \end{cases}$$

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟




۴ تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵ تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار $a$ چقدر است؟

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.