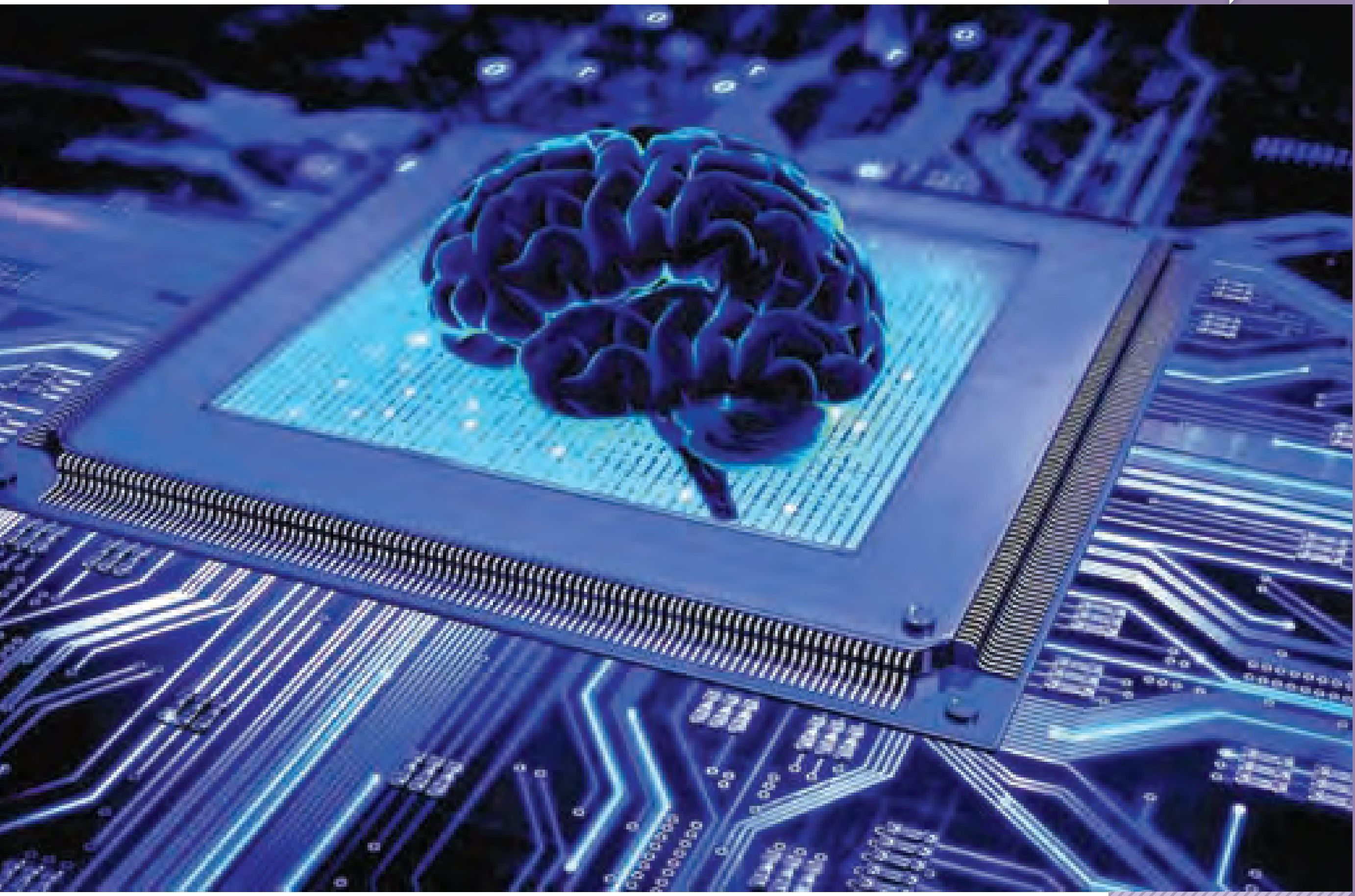
فصل اوّل

ماتریس و کاربــردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{برد} & \text{باخت} & \text{مساوی} & \text{امتیاز}\end{array}\\ \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰\\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵\\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲\end{bmatrix}\end{array}$$

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند B ، A و C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال : ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (-۷) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

$$A=\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۲\\ ۱ & -۷ & ۳ & ۵\\ ۱۴ & \pi & ۲۰ & -۳\end{bmatrix}$$

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

۱– Matrix

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

ماتریس $A_{2\times3}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کنند. همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[1]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ ماتریسی 2×2 باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

حل : $a_{11}=a_{22}=7$ و $a_{21}=5$ و $a_{12}=-2$ پس $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس 4×3 و یک بار با ماتریسی 3×4 نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کِیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۹۷–۱۸۱۵) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

۱ــ اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1\times1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ــ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \text{و} \quad C=[۵]_{۱\times۱}=۵$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲ــ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$$A=[۱ \ \ ۲]_{۱\times۲} \quad , \quad B=[۲ \ \ -۱ \ \ ۴ \ \ ۵]_{۱\times۴} \quad , \quad C=[۷]_{۱\times۱}=۷$$

۳ــ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times۱} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۱} \quad \text{و} \quad C=[۱۱۴]_{۱\times۱}=۱۱۴$$

۴ــ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C=[۲]$$

۶ــ ماتریس **صفر**، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i,j \,،\, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۶,\ y=۳\ ,\ z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کاردرکلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۴×۳ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ \ ,\ \ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱ \\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴ \\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=[۱ \ -۱ \ ۳ \ ۷] \quad , \quad B=[۳ \ ۲ \ -۱ \ ۴] \Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=[۵] \quad , \quad B=[-۷] \Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix} ۲۴\times۲ & ۲۶\times۲ & ۱۷\times۲ & ۱۲\times۲ \\ ۱۵\times۲ & ۱۹\times۲ & ۲۸\times۲ & ۳۱\times۲ \\ ۷\times۲ & ۱۱\times۲ & ۲۲\times۲ & ۳۵\times۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴+۲۴ & ۲۶+۲۶ & ۱۷+۱۷ & ۱۲+۱۲ \\ ۱۵+۱۵ & ۱۹+۱۹ & ۲۸+۲۸ & ۳۱+۳۱ \\ ۷+۷ & ۱۱+۱۱ & ۲۲+۲۲ & ۳۵+۳۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}=A+A=۲A$$

کار در کلاس

۱ــ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=$

ب) $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=$

پ) $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=$

ت) $۷\times\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=$

۲ــ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=(-۱)\times$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\overline{O}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

خاصیت جابه‌جایی — الف) $A+B=B+A$

خاصیت شرکت‌پذیری — ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها — پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times ۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times ۲+(-۲)\times ۱ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times ۳ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{در } \mathbb{R}]{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}}\begin{bmatrix} -۲\times ۱ & -۲\times ۲ & -۲\times ۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times ۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times ۱ & -۲\times ۴ \\ -۲\times ۳ & -۲\times ۲ & -۲\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضریب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

کار در کلاس

۱ــ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲ــ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال : اگر $A=[-۱ \ \ ۲ \ \ ۰ \ \ ۳ \ \ -۵]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱ \ \ ۲ \ \ ۰ \ \ ۳ \ \ -۵]\times\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

کار در کلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[c_{ij}]$ ، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iاٌم و ستون jاُم در آن یعنی، C_{ij} از ضرب سطر iاُم A در ستون jاُم B به‌دست می‌آید، یعنی

$c_{ij} = $ سطر iام A × ستون jام B

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}$$

مثال : اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

اگر فرض کنیم، $A_{3\times3}\times B_{3\times2} = C = [c_{ij}]_{3\times2}$ در این صورت ماتریس حاصل‌ضرب یعنی C ماتریسی ۲×۳ بوده و داریم :

$$c_{12} = \text{سطر اول } A \times \text{ستون دوم } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1\times3 + 2\times2 + (-1)\times5 = \cdots$$

$$c_{32} = \text{سطر سوم } A \times \text{ستون دوم } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3) + (-4) + 20 = \cdots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4-5 & 2-2-4 \\ 9+4+5 & 6-2+4 \\ -3-4+20 & -2+2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 18 & 8 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B \times A)$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟

کار در کلاس

۱ـ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \cdots$

ب) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3} \Rightarrow A \times B = \cdots , B \times A = \cdots$

پ) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times1} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{1\times3} \Rightarrow A \times B = \cdots \quad , \quad B \times A = \cdots$

ت) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A \times B = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=\circ$ آنگاه $a=\circ$ یا $b=\circ$» مقایسه کنید.

۲ــ اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید:

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$

ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times۵}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردرکلاس

۱ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۲ــ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانیِ مرتبهٔ n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعیِ مرتبهٔ n است یعنی:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

$$I_n=\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & ۱ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & & & & \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ \circ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد یعنی :

$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۴ــ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تمرین

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \overline{O}$ و $B\neq \overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و . . . و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}\ \ n>1)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳ × ۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳ × ۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

درس دوم

وارون ماتریس و دترمینان[1]

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند a $(a\neq ۰)$ را با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a\times\frac{۱}{a}=۱$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ است.

کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (در صورت وجود) باید ماتریسی چون $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ بیابیم طوری که $A\times B=B\times A=I$ یا $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ که این تساوی، x، y، z و t را بر حسب a، b، c و d نتیجه

۱– Determinant

می‌دهد و ماتریس B یا $A^{-۱}$ به صورت $A^{-۱}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc}\\[2mm] \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$ به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینانِ A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت :

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ $A^{-۱}$ واضح است که اگر $|A|=۰$ آنگاه $A^{-۱}$ وجود ندارد. (A وارون‌پذیر نیست.) به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه $A^{-۱}$ وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A|\neq ۰$.

مثال : وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

چون $|A|=۲\neq ۰$ پس A دارای وارون است (وارون پذیر است) و داریم

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۴ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-۱})^{-۱}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

قضیه یکتایی وارون : وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های ۲×۲ محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات : فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$

$=CI=C$

فعالیت

دستگاه $\begin{cases} ۲x + y = ۴ \\ ۷x + ۴y = ۱۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت :

$$\begin{bmatrix} \cdots + \cdots \\ ۷x + ۴y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ \ldots \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم :

$$\begin{bmatrix} ۲x + y \\ ۷x + ۴y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهولِ مفروض است.

۱ــ حال اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی $A^{-۱}$ را بیابید.

$|A| = \cdots - \cdots = ۱ \neq ۰ \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲ــ معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلّی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاهِ دو معادله و دو مجهولِ $\begin{cases} ax+by=e_۱ \\ cx+dy=e_۲ \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و درصورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq ۰$ با ضرب $A^{-۱}$ از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B \Rightarrow (A^{-۱}A)X=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-۱}B \Rightarrow X=A^{-۱}B$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟

این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

مثال : دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل : ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و چون $|A|=۲\neq ۰$ پس $A^{-۱}$ وجود دارد. با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردنِ درایه‌های روی قطر فرعیِ ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A|=۲$، ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots \\ ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}} \begin{cases} x=\cdots \\ y=۲ \end{cases}$$

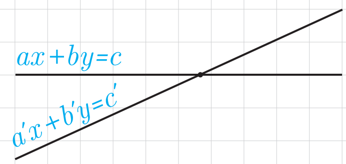
تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و yای است که در هر دو معادلهٔ دستگاه که هرکدام معادلهٔ یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

یادآوری

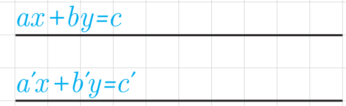
در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادلهٔ یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می‌توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می‌کنیم منظور یافتن نقطه‌ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می‌توان در نظر گرفت :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.



ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد :



۱ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

I) اگر $|A| \neq ۰$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

II) اگر $|A| = ۰$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط بر هم منطبق هستند).

کار در کلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \\ -۴x + ۶y = ۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ــ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ــ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x - ۳y = ۲ \\ -۳x + ۹y = -۶ \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A|=۰$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع‌به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به‌کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به‌دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد $(1\leq n\leq 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:
(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبهٔ ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$\text{I)}\ A=[k]_{1\times 1}\Longrightarrow |A|=k \qquad \text{II)}\ A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Longrightarrow |A|=ad-bc$$

$$\text{III)}\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

برحسب سطر اول $|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است.)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنهٔ آن مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ و هم‌دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$\det: M_{2\times 2}\to\mathbb{R}$

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=ad-bc$

(منظور از $M_{2\times 2}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ است.)

مثال: دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $A=[-7]\longrightarrow|A|=-7$

ب) $A=\left[\sqrt{2}\right]\rightarrow|A|=\sqrt{2}$

پ) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}\rightarrow|A|=[(4\times4)-(2\times8)]=0$

ت) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=(-۱۰)-(۱۲)=-۲۲$

ث) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A|=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

برحسب سطر اول

$$|A|=۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ \end{vmatrix}-(-۱)\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۰ \end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=۱\times(۰-۱۲)+(۰+۶)+۲\times(۸+۲)=(-۱۲)+۶+۲۰=۱۴$$

برحسب ستون سوم

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}+۳\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}+۰\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۲\times(۸+۲)-۳\times(۴-۲)+۰=۲۰-۶=۱۴$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

برحسب سطر دوم

$$|A|=۰+۰+۴\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{vmatrix}=-۴\times(۸-۳)=-۲۰$$

برحسب ستون اول

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}-۰+(-۳)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=۲\times(۰-۱۶)-۳\times(-۴-۰)=-۳۲+۱۲=-۲۰$$

(درایهٔ (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳−) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش (فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر :

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال : دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟).

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برحسب‌سطر سوم

$$|A|=(-۱)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}+(-۲)\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -۱\times(۹-۸)+۲(۶-۴)+۱\times(۴-۳)=-۱+۴+۱=۴$$

$$\left|\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix}$$

با دستور ساروس $|A| = (۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۳) = -۱۳+۱۷=۴$

کاردرکلاس

۱ــ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

۲ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه

۱ــ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ....

۲ــ دترمینان ماتریس مربعی صفر، .... است.

۴ــ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و داشته باشیم $A=4\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ اگر $A=[1 \ \ 2 \ \ -3]$ و $B=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^3-2\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی 3×3 چون A بیابید که $|A| = 3$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $\big|\,|A|A\,\big|$ را بیابید.

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$