

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است.})$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10 درجه سانتی‌گراد است.

$$d(1) = \dots\dots\dots$$

$$d(3) = \dots\dots\dots$$

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2 درجه سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 5000; \quad 2 \leq d \leq 14$$

که در این تابع، d دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 5000 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10 درجه سانتی‌گراد به 1700 افزایش یافته است.

$$n(2) = \dots\dots\dots$$

$$n(3) = \dots\dots\dots$$

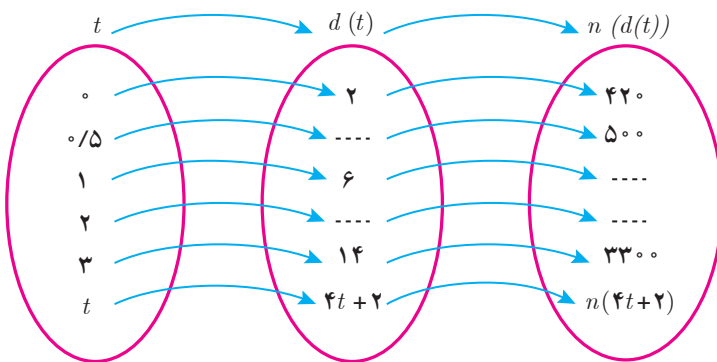
به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر:



از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی که به میزان 2 ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 1700 تاست.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t) = 4t + 2$	$n(d(t)) = n(4t + 2)$
۰	$d(0) = 2$	$n(d(0)) = n(2) = 420$
۰/۵	$d(0/5) = \dots$	$n(d(0/5)) = n(\dots) = 500$
۱	$d(1) = 6$	$n(d(1)) = n(6) = \dots$
۲	$d(2) = \dots$	$n(d(2)) = n(\dots) = \dots$
۳	$d(3) = 14$	$n(d(3)) = n(14) = 3300$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است. آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟ به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

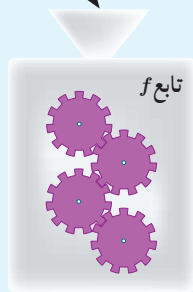
$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 5000 = \dots = 320t^2 + 4200t + 4200 \quad 0 \leq t \leq 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مرحله ساخت تابع $g(f(x))$:

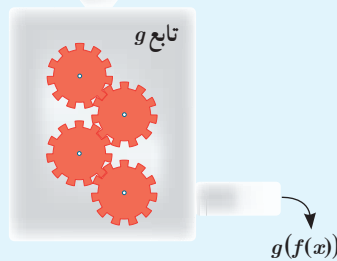
مرحله اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

x باید در دامنه تابع f باشد.



$f(x)$ باید در دامنه تابع g باشد.

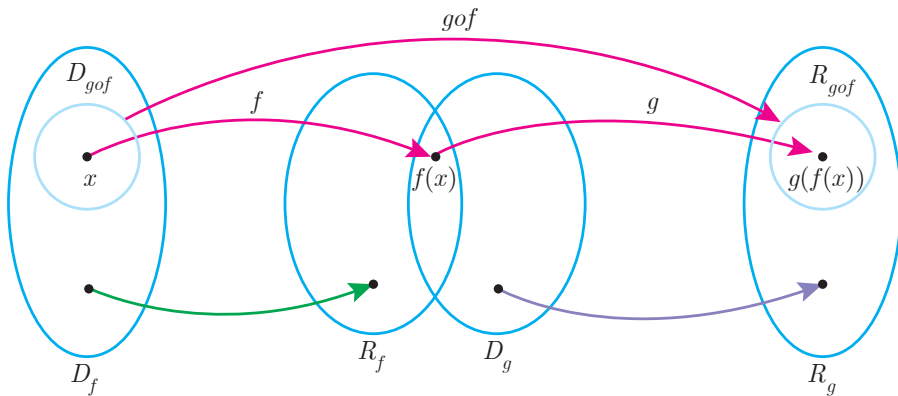
مرحله دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.



اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f دامنه تابع g اشتراک نانهی داشته باشند، تابع $(g \circ f)(x)$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب:
 دامنه تابع مرکب gof مجموعه‌هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:
 ۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.
 ۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع gof را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع fog به صورت زیر است:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

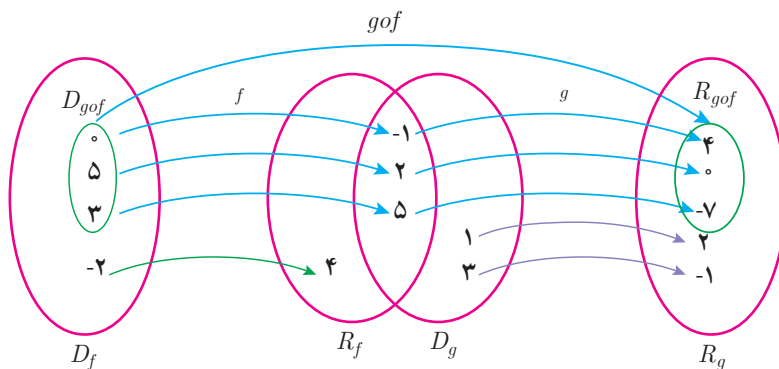
$$(fog)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (gof)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (gof)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (gof)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (gof)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) \end{aligned} \right\} \rightarrow gof = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

تعریف نشده: $g(4)$



با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$	x	$g(x)$
-۳	-۷	-۳	۸
-۲	-۵	-۲	۳
-۱	-۳	-۱	۰
۰	-۱	۰	-۱
۱	۳	۱	۰
۲	۵	۲	۳
۳	۵	۳	۸

الف) $(fog)(۱) = \dots\dots\dots$

ب) $(fog)(-۱) = \dots\dots\dots$

پ) $(gof)(۰) = \dots\dots\dots$

ت) $(gog)(-۲) = \dots\dots\dots$

ث) $(gof)(۲) = \dots\dots\dots$

ج) $(fof)(۱) = \dots\dots\dots$

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع gof را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-1 \geq 0$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$ ، بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{2x^2-1-1} = \sqrt{2x^2-2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع fog و gof را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

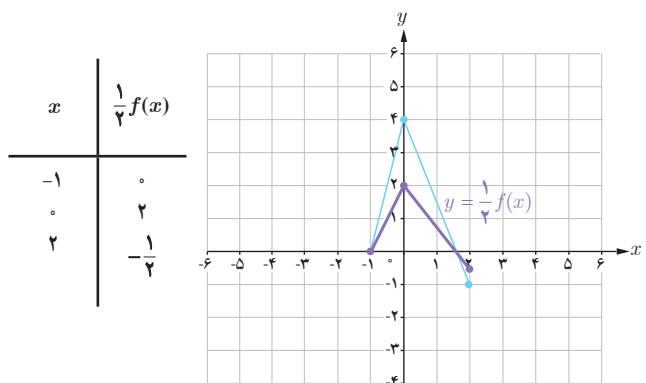
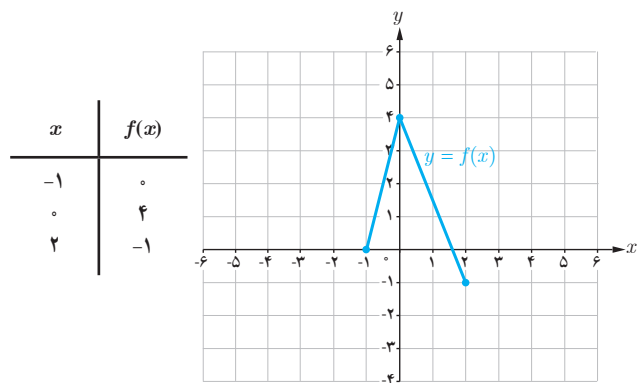
تذکر: دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنه تابع gof با توجه به ضابطه آن \mathbb{R} است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و fof را به دست آورید.

«تبدیل نمودار توابع»

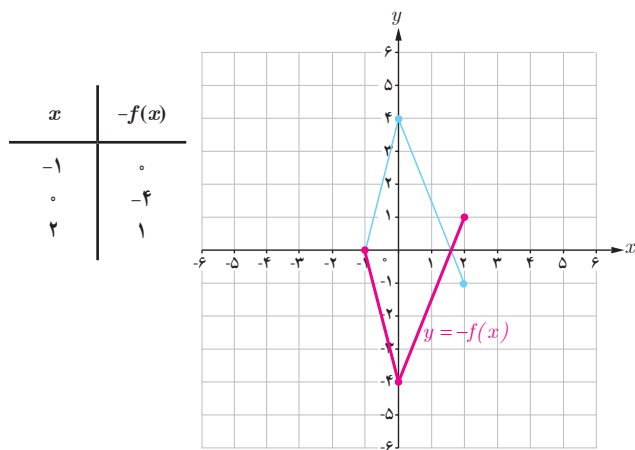
یادآوری: همان طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{4}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.

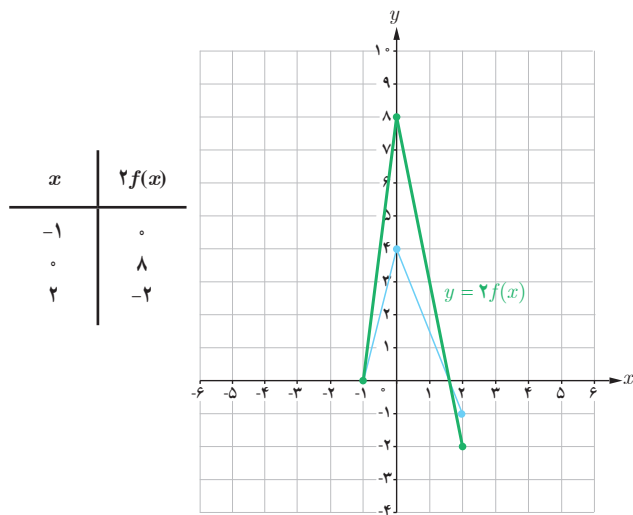


برای رسم نمودار $y=\frac{1}{4}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم.

از آنجایی که ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور x ها یکسان است.



برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می‌کنیم.

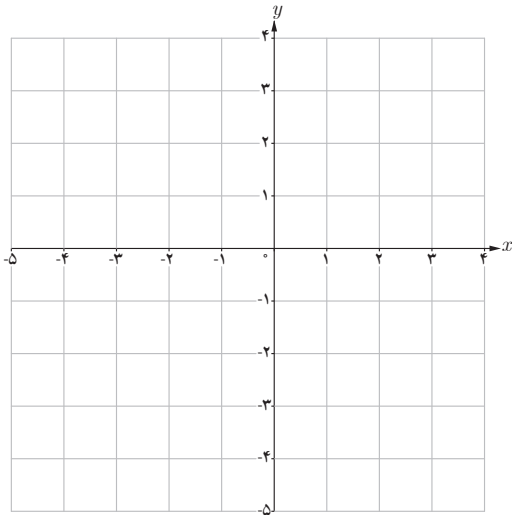


برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در 2 ضرب می‌کنیم.

دامنه تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

کار در کلاس

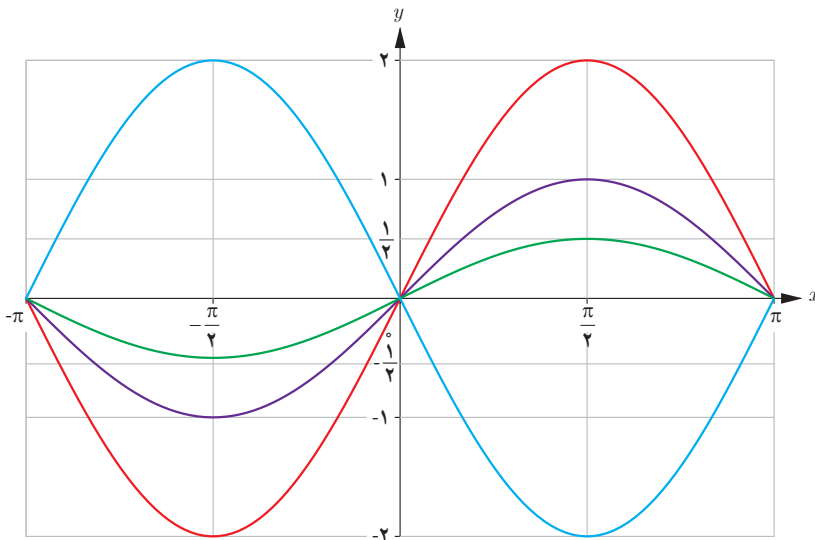
نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{3}|x - 2|$ و $k(x) = -\frac{1}{3}|2 - x|$ را رسم کنید.



کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$ ، $y = -2 \sin x$ و

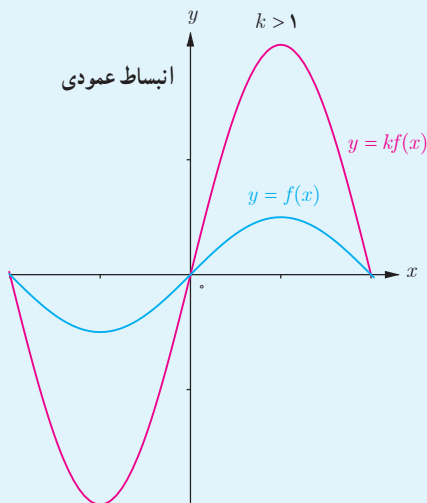
$y = \frac{1}{3} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



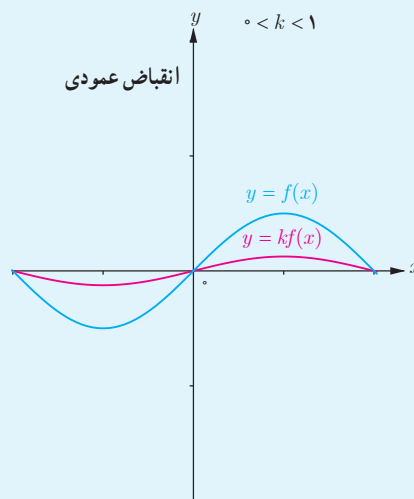
بیلاقات تالش

می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

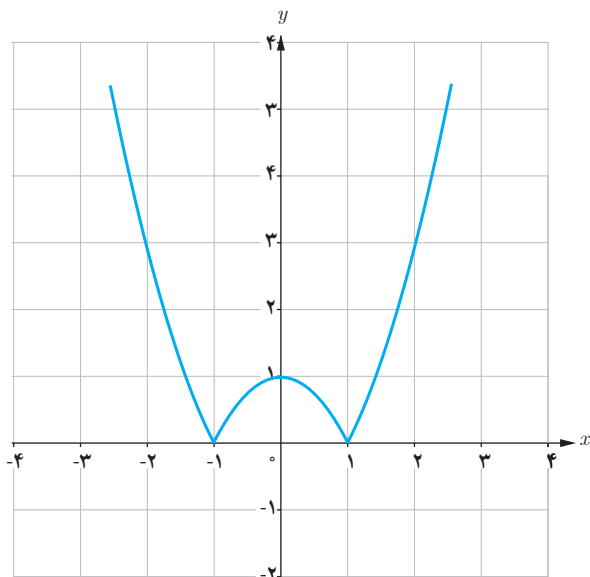
اگر $k > 0$ ، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.



رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال: تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم. ضابطه تابع $y = f(2x)$ به صورت $f(2x) = 2x + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$-4 \leq 2x \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(2x) : D = [-2, 0]$$

همچنین ضابطه تابع $y = f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

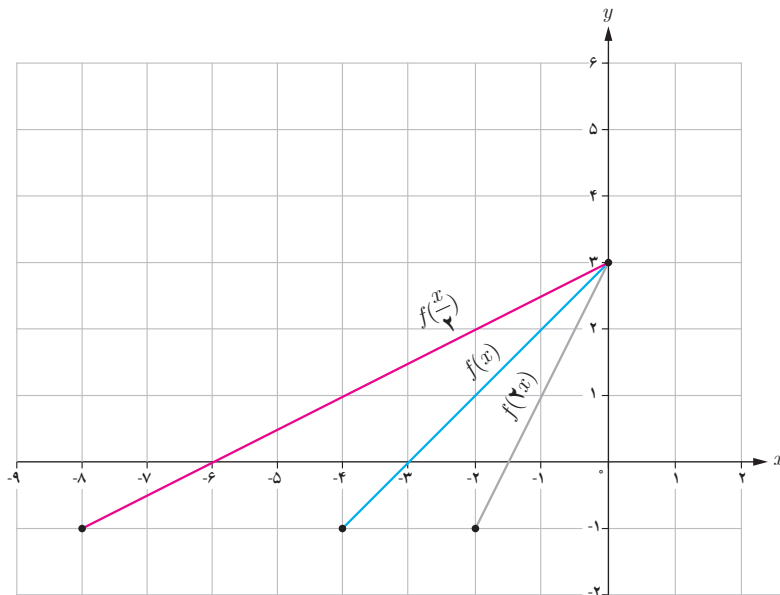
$$-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \rightarrow -8 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(\frac{x}{2}) : D = [-8, 0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x + 3$	-1	0	1	2	3

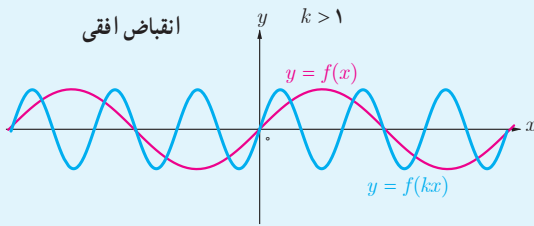
x	-2	-1/2	-1	-0.5	0
$f(2x) = 2x + 3$	-1	0	1	2	3

x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$	-1	0	1	2	3

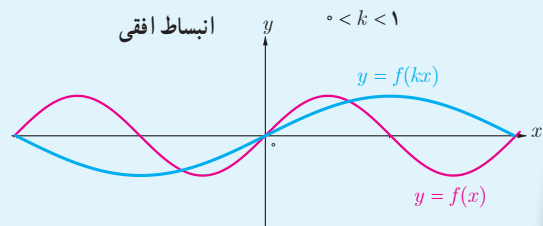


همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
 اگر $k > 0$ ، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.
 اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضرب $\frac{1}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

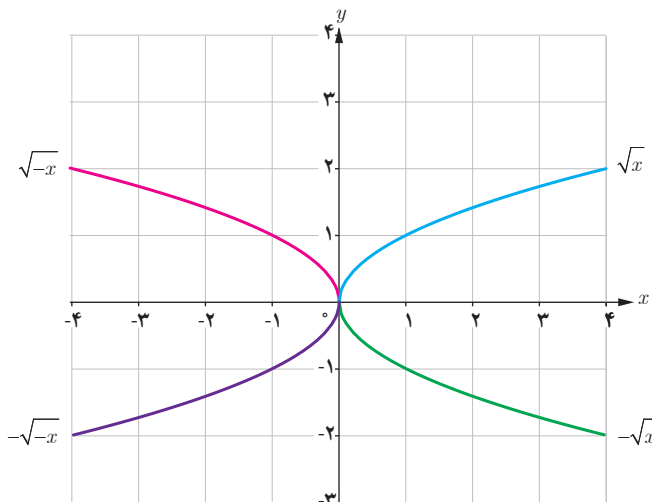
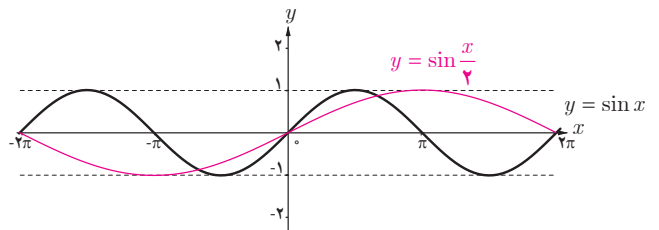
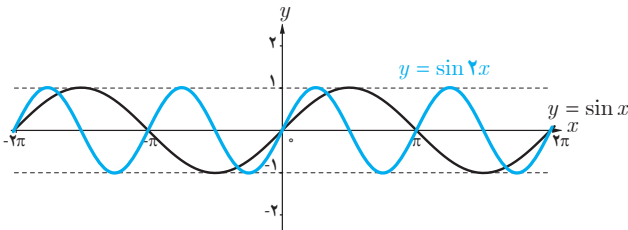


اگر $k > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \sin 2x$ و $y = \sin \frac{x}{2}$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y = \sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y = \sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار تابع $y = \sin \frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y = \sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.

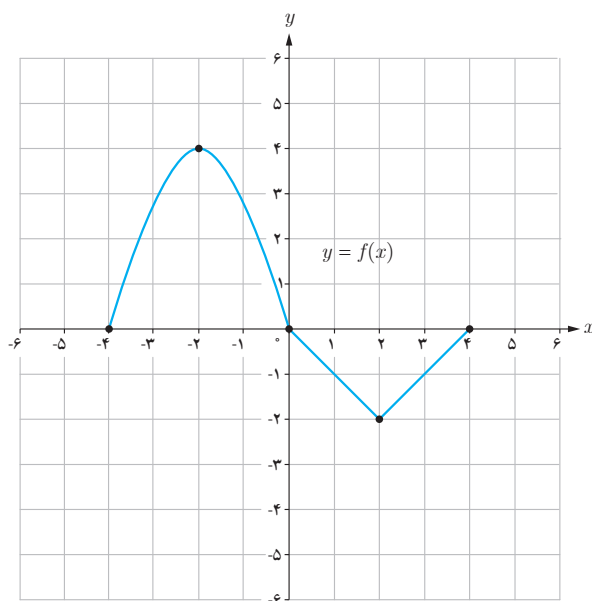


کار در کلاس

نمودار توابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم شده‌اند. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

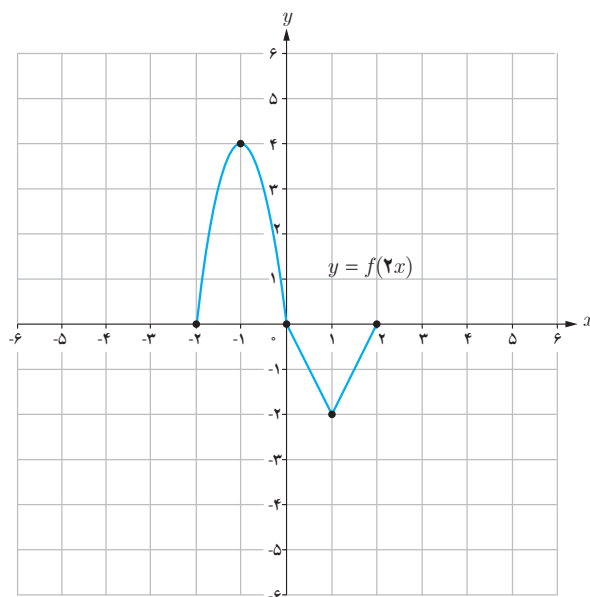


الف) برای تعیین دامنه $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $y=f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید. برای رسم نمودار $f(2x)$ ، طول نقاط یا همان x ‌ها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2, 0)$
...	-2	4	$(\dots, 4)$
...	0	0	$(\dots, 0)$
...	2	-2	$(\dots, -2)$
...	4	0	$(\dots, 0)$

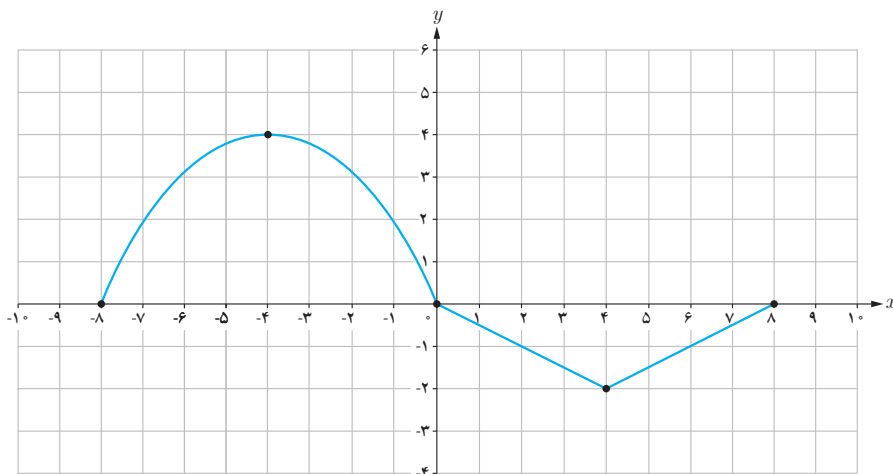


ب) برای تعیین دامنه $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$$

پس دامنه تابع $y = f(\frac{1}{4}x)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است :

x	$f(\frac{1}{4}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0

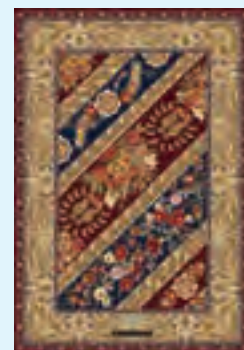


همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{4}x)$ طول هر نقطه را در 2 ضرب می کنیم.

دامنه تابع $y=f(kx)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش هایی را بر روی آثارشان جلوه گر می سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می کنند. در این طراحی ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می شود.



۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

۵ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنجشنبه به مشتریان خود در خریده های بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

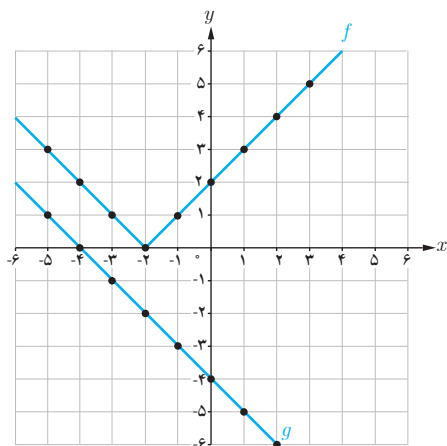
الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1)$

ب) $(gof)(0)$

پ) $(fog)(1)$

ت) $(gof)(-1)$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(fog)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(gof)(x) = -5$

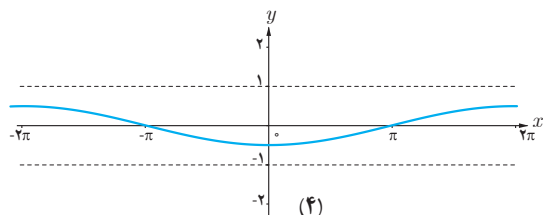
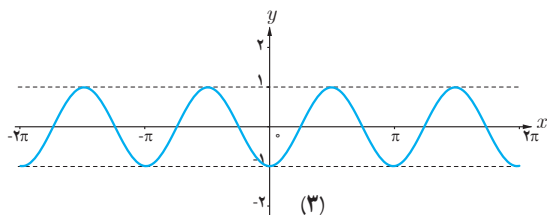
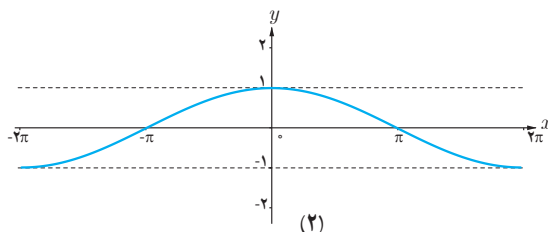
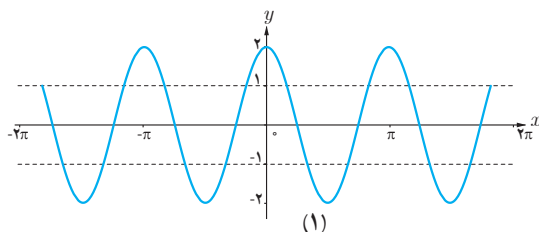
۱۰ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{4} \cos(-\frac{1}{4}x)$

ب) $y = 2 \cos 2x$

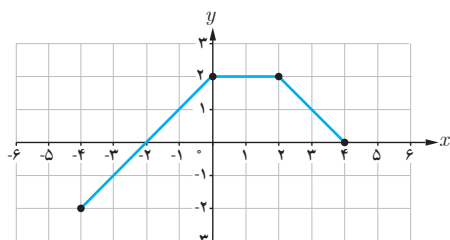
پ) $y = \cos(\frac{1}{4}x)$

ت) $y = -\cos 2x$



۱۱ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y = \frac{1}{4} f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{4}x)$