فصل

۲ مثلثات

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

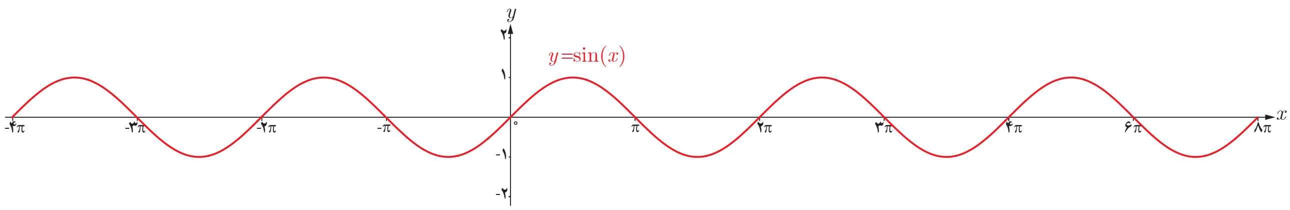
درس اوّل تناوب و تانژانت

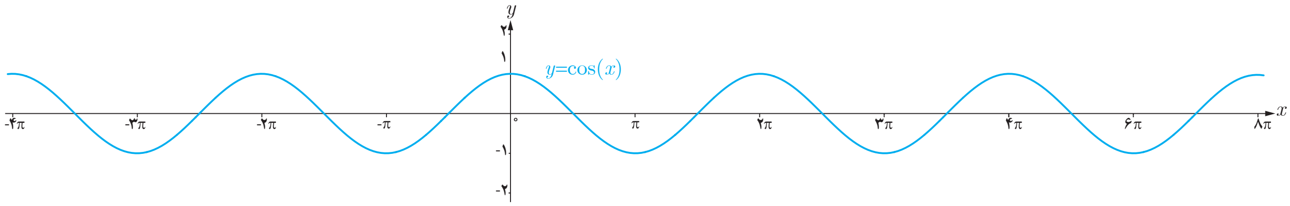
درس دوم معادلات مثلثاتی

درس اوّل

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است $(\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x)$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



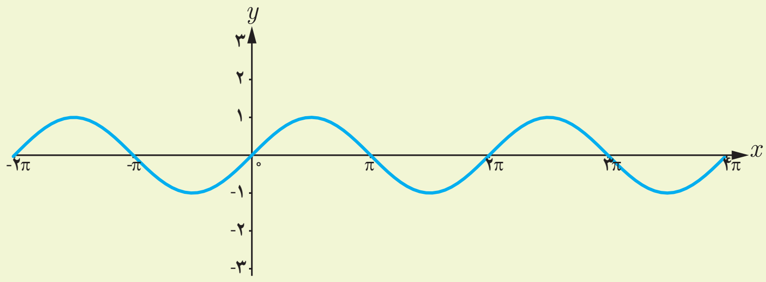
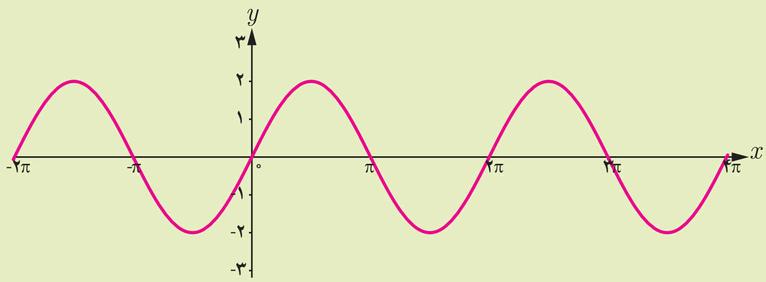
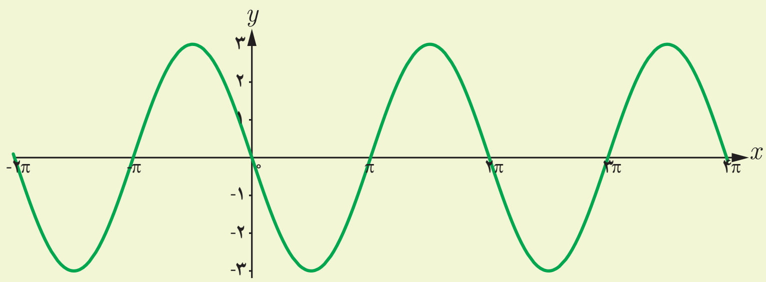
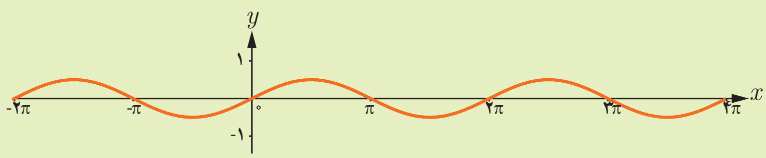
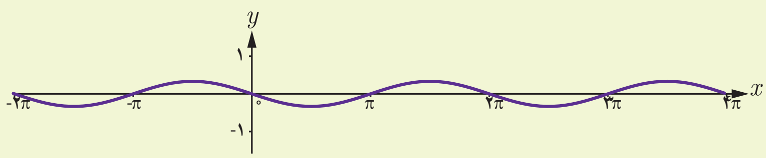


با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

> **تعریف:** تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.
> کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ $\left(f(x) = \cos x\right)$ برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

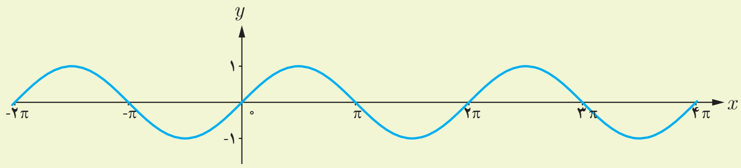
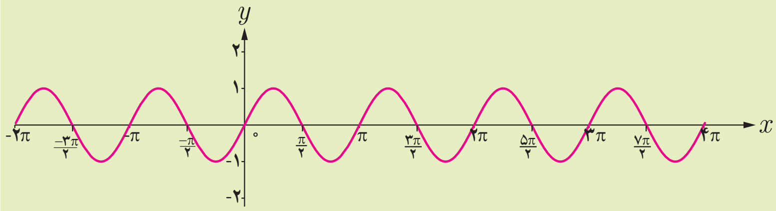
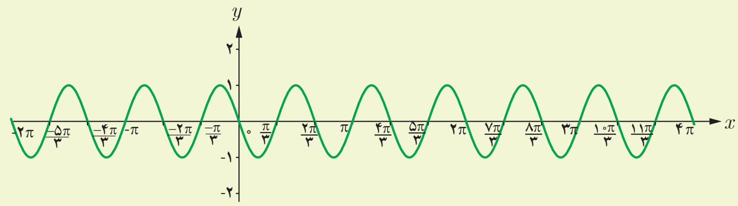
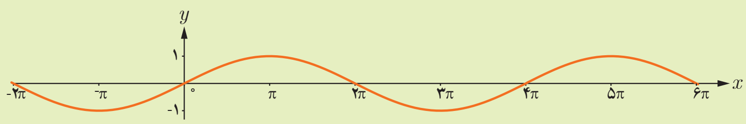
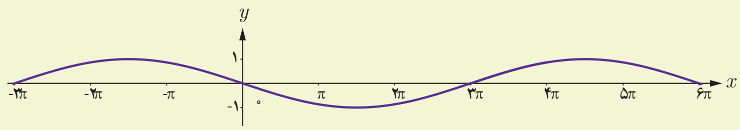
دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	-۱	۱		$y=\sin x$
…	…	…		$y=۲\sin x$
…	…	…		$y=-۳\sin x$
…	…	…		$y=\frac{۱}{۲}\sin x$
…	…	…		$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	-۱	۱		$y=\sin x$
...	...	...		$y=\sin ۲x$
...	...	...		$y=\sin(-۳x)$
...	...	...		$y=\sin\frac{x}{۲}$
...	...	...		$y=\sin(-\frac{x}{۳})$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\cos bx$ و $y=\cos bx+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y=۳\sin(۲x)-۲$ ب) $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y=\pi\sin(-x)+۱$ ت) $y=۸\cos(\frac{x}{۳})$

حل :

الف) $\max=|۳|-۲=۱$ $\min=-|۳|-۲=-۵$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

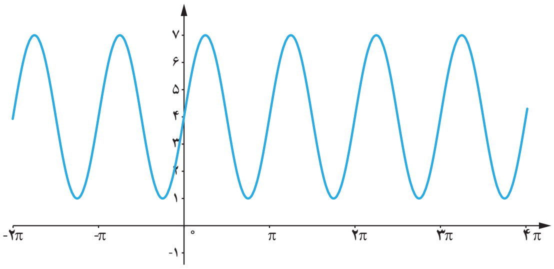
ب) $\max=\left|-\frac{۱}{۴}\right|=\frac{۱}{۴}$ $\min=-\left|-\frac{۱}{۴}\right|=-\frac{۱}{۴}$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$

پ) $\max=|\pi|+۱=\pi+۱$ $\min=-|\pi|+۱=۱-\pi$ $T=\frac{۲\pi}{|-۱|}=۲\pi$

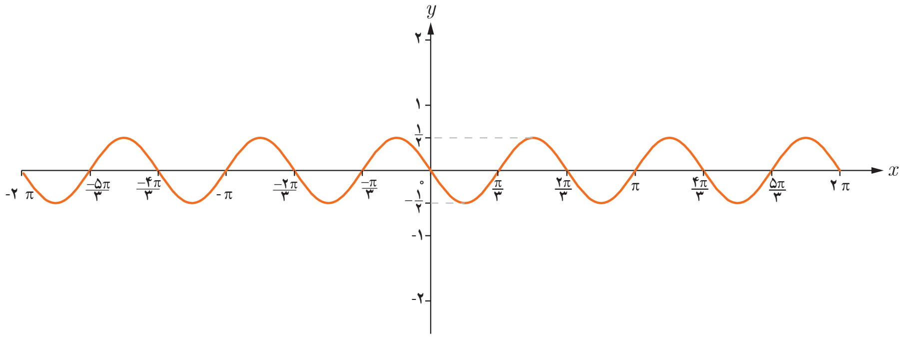
ت) $\max=|۸|=۸$ $\min=-|۸|=-۸$ $T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|}=۶\pi$

مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+c$ یا $f(x)=a\cos bx+c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

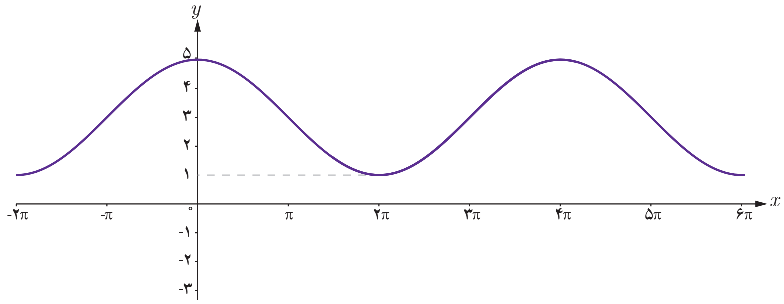
الف)



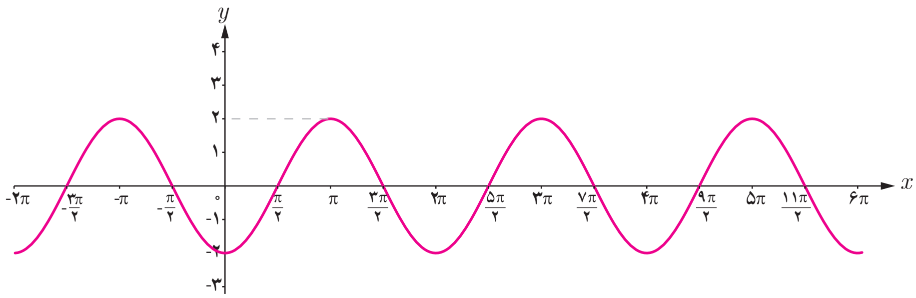
ب)



پ)



ت)



حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y=3\sin(2x)+4$

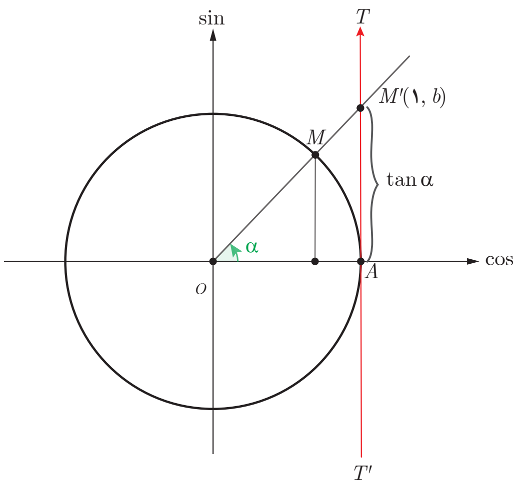
ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -۲\cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

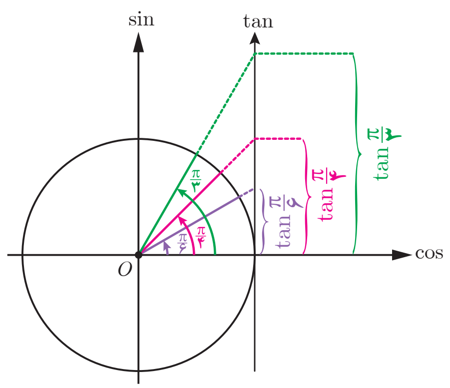
می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

تغییرات تانژانت

فعالیت



با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = ۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

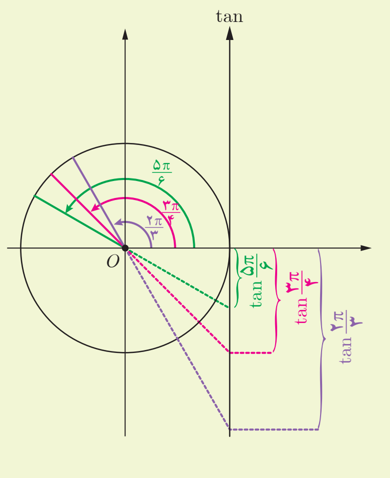
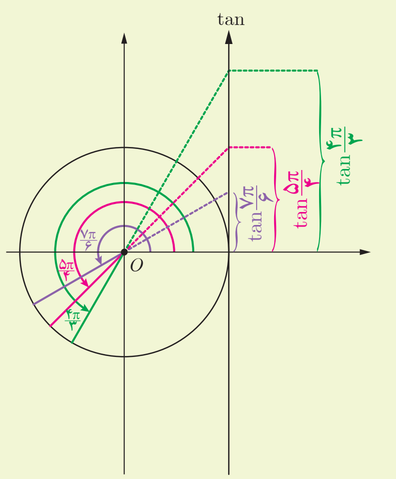
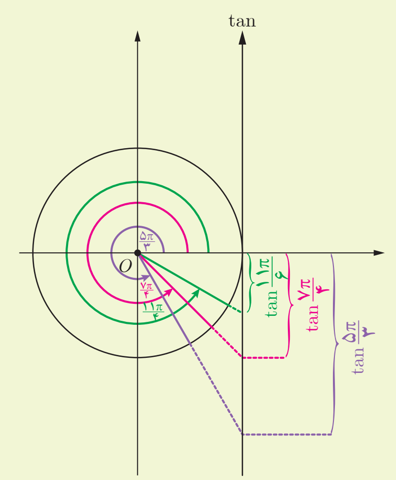
الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	....	....	....
بازه تغییرات	....	....	....

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↙ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول				ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم				
۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
۰ ↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	...	... ↗	$+\infty$	...	-۱	...	۰	...	...	...		...	...	...	۰

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $k \in \mathbb{Z}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[۱] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

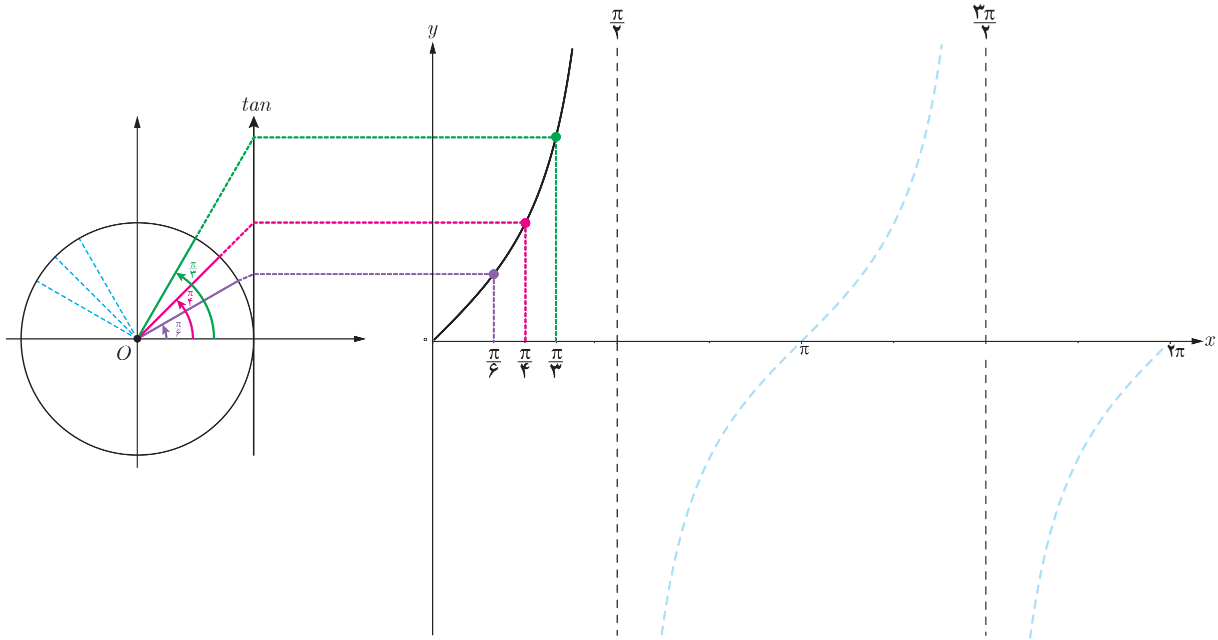
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan\alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

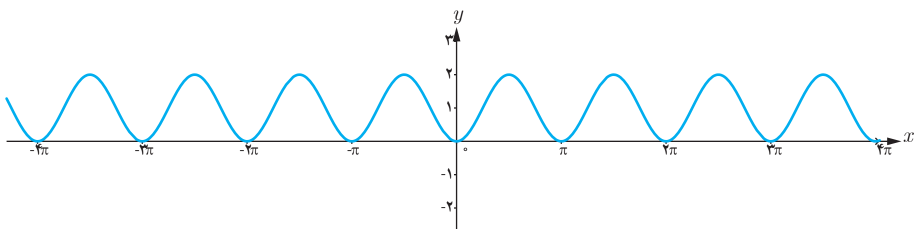
پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

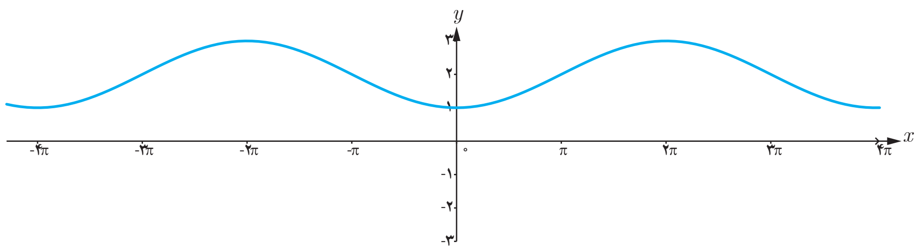
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

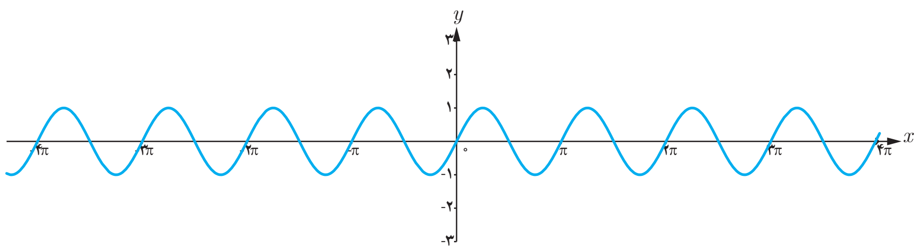
۱)



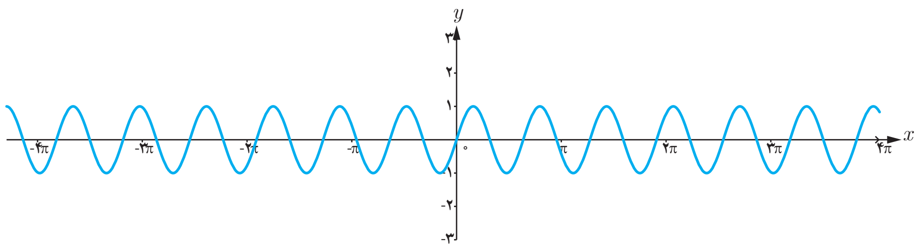
۲)



۳)



۴)



۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۳$

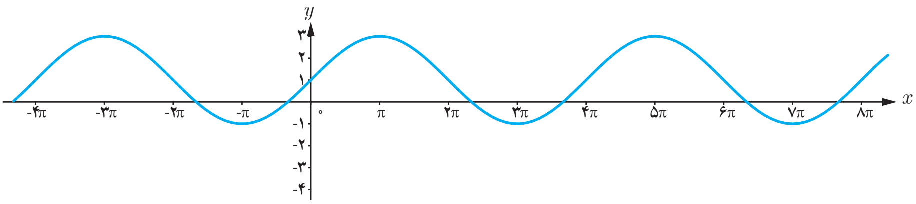
ب) $T=۳ \quad , \quad \max = ۹ \quad , \quad \min = ۳$

پ) $T=۴\pi \quad , \quad \max = -۱ \quad , \quad \min = -۷$

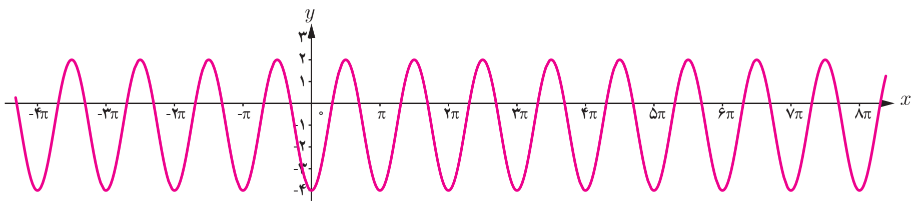
ت) $T=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max = ۱ \quad , \quad \min = -۱$

۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



ب)



۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید :

الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$