

حد بی نهایت و حد در بی نهایت



عکاس: سپهبدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهده دریا، حس می‌کند که بخشی از بی نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهده طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

حد بی نهایت

درس اول

حد در بی نهایت

درس دوم

درس اول

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(\square - 6x) \\ \hline x + 1 \\ -(\square - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید:

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = \dots$

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید.

ت) $f(3)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید: $2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + \square) + 4$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد:

$$\frac{f(x)}{Q(x)} \Big|_{x-a} \quad R$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت:

$$f(a) = (\dots - a)Q(\dots) + R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که:

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجه حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline R = \dots \end{array}$$

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

بنابر رابطه تقسیم داریم: $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + \dots)$ همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

۲ چندجمله‌ای $g(x) = 2x^2 + x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$2x^2 + x + 1 \quad | \quad x + 1$$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دوجمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x = 1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - 1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

۱- در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجه صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجه حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب های دو جمله به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x + 2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(-x^2 - 2x) \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه 5 برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x = 8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4+4+4) = 96$$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2}$

حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



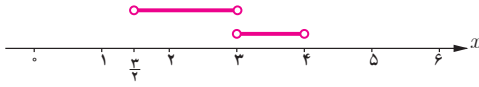
همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $\{x_0\} - (a, b)$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می شود.



مثال: مجموعه $\{3\} - (\frac{5}{4}, 4)$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0, x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{2}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

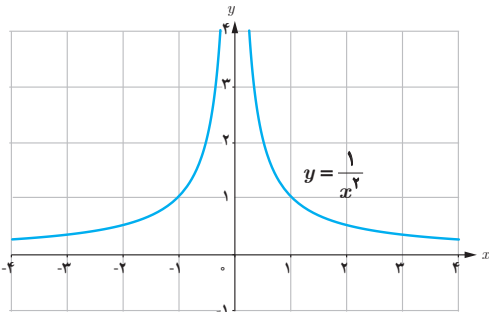


فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	...	100000000	$\rightarrow ? \leftarrow$...	1000000	25

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ ، به هر اندازه دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقادیرهای بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱- رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

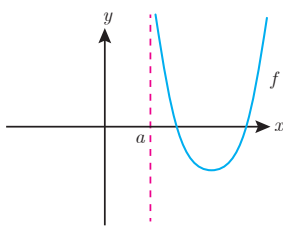
رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کرد، مشروط بر آنکه x به قدر به a نزدیک اختیار شود.

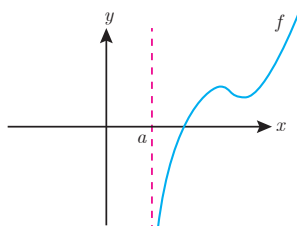
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

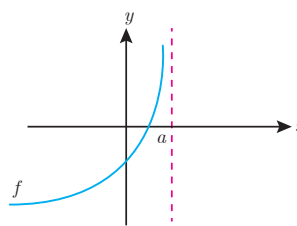
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل های زیر دقت کنید.



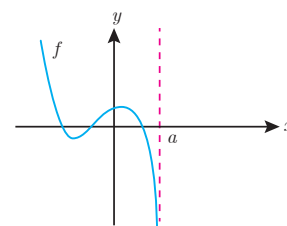
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



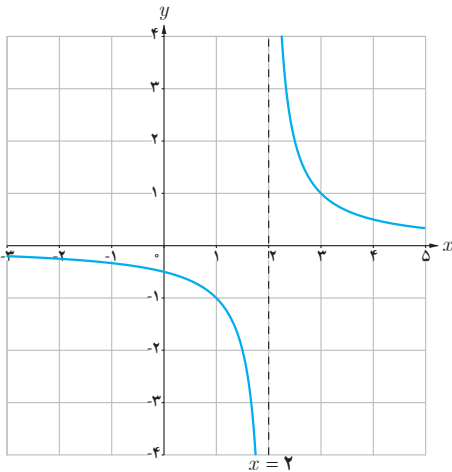
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود.



بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

(الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنا بر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

۱- در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty \times \infty$ و $\infty - \infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

۲) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.

تمرین

۱) الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۳) حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$

۴) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵) الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

درس دوم

حد در بی نهایت

حد در بی نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

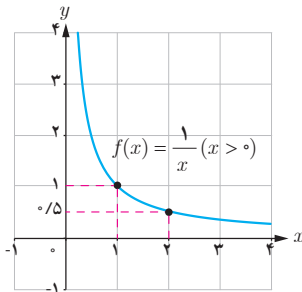
فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$

الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟



مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ?$

از جدول دیده می شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.00001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 100000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.00001 باشد؟
 با این شرایط می گوییم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می توان گفت:

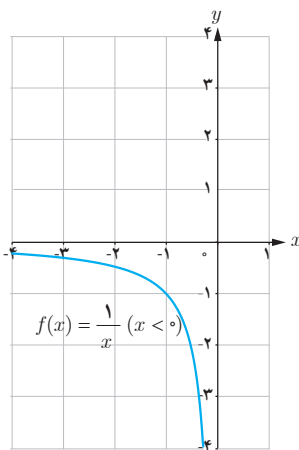
اگر تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$...	-1000000	-100000	-10000	-1000
$f(x) = \frac{1}{x}$	$? \leftarrow$...	-0.0000001	-0.001



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0) \quad (\text{پ})$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{3 + 0 - 0} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$

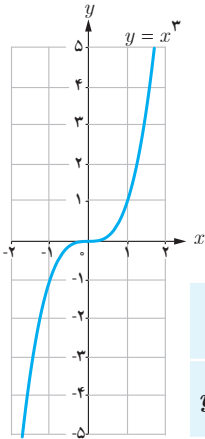
۲) الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-100000000	-10000000	10000000	100000000	1000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

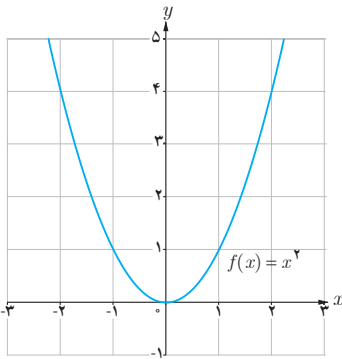
تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.

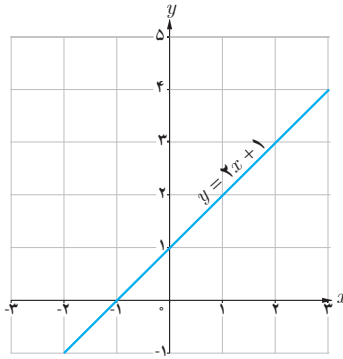
تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چراکه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



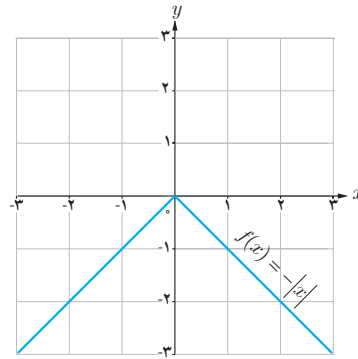
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots$



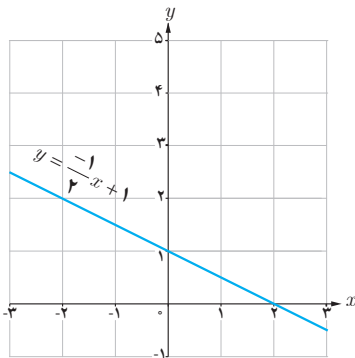
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = \dots$



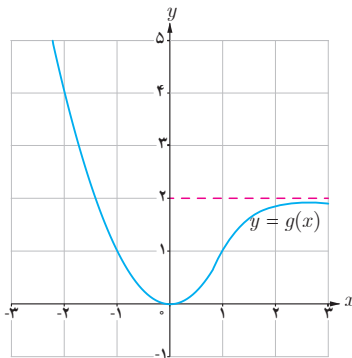
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$



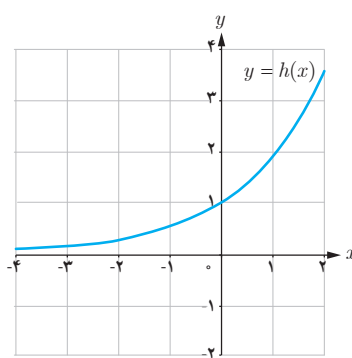
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = \dots$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (\text{مثبت } a) \\ -\infty & (\text{منفی } a) \end{cases}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (\text{زوج } a \text{ مثبت } n) \\ -\infty & (\text{زوج } a \text{ منفی } n) \\ -\infty & (\text{فرد } a \text{ مثبت } n) \\ +\infty & (\text{فرد } a \text{ منفی } n) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع حد گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

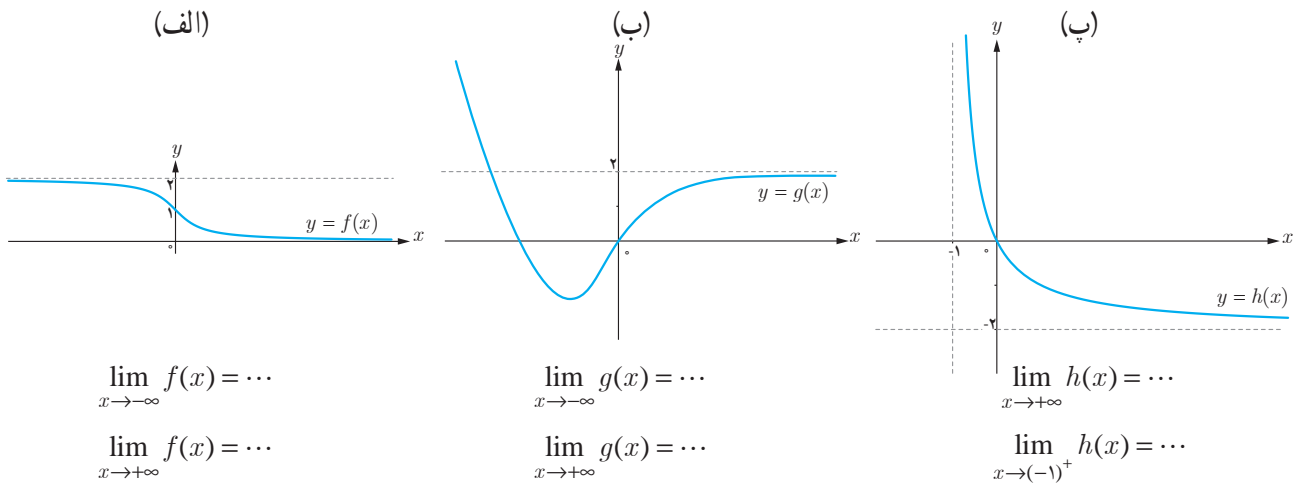
تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

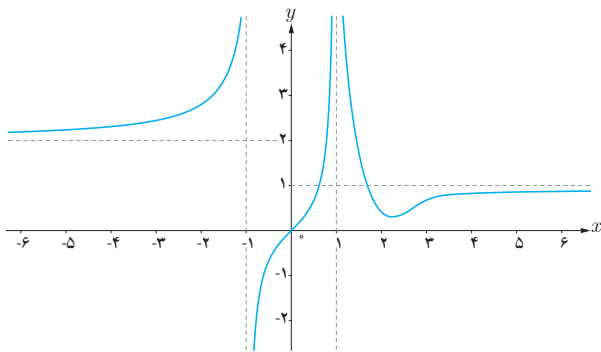
الف) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



- الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$
 پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{1}{x}\right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 6\right)$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟