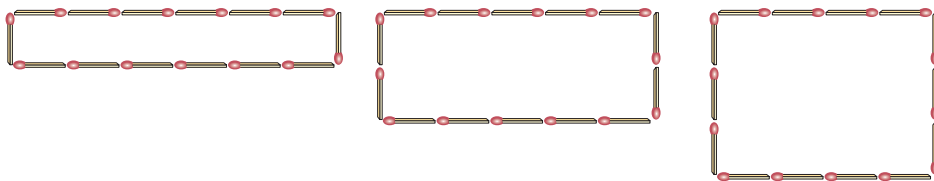


افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و ... در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را در نظر بگیرید که با استفاده از روش‌های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمره مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد در نظر بگیریم. با استفاده از همه این چوب کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجه کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم محیط، دیده می‌شود که مساحت‌ها برابر نیستند و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچه قدر اندازه طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن می‌یابد.

۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	$0/5 \times 6/5$	1×6	2×5	$2/5 \times 4/5$	3×4	$3/2 \times 3/8$...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	$3/25$	۶	۱۰	$11/25$	۱۲	$12/16$...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، $12/16$ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد $12/16$ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟
درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$$S = x \cdot l \quad (1)$$

برای آنکه S به صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به دست آوریم:

$$P = 14: \text{ محیط مستطیل}$$

$$2(x + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(7 - x)$$

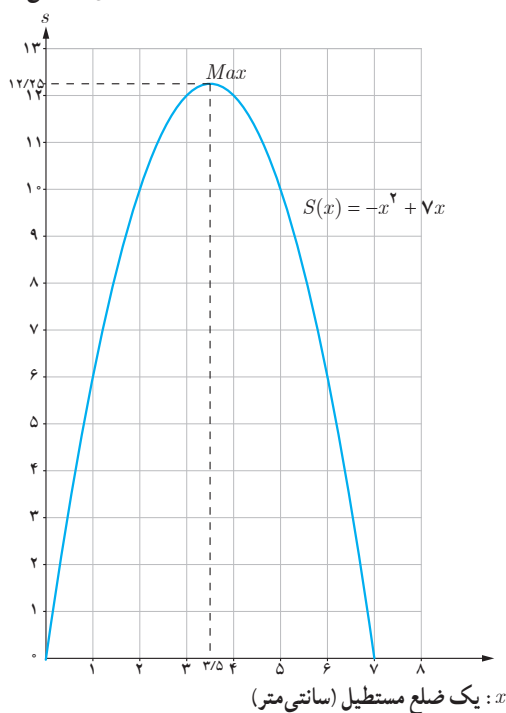
$$S(x) = -x^2 + 7x, \quad x \in [0, 7]$$

از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5 \quad (\text{طول نقطه بحرانی تابع})$$

جدول تغییرات تابع S در بازه موردنظر به شکل زیر است:

مساحت مستطیل (سانتی متر مربع)



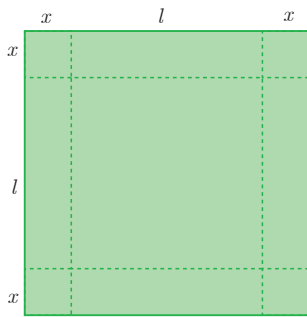
x	۰	۳/۵	۷
$S'(x) = -2x + 7$	+	۰	-
$S(x) = -x^2 + 7x$	۰	↗ ۱۲/۲۵ ↘	۰
		ماکزیمم مطلق	

از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطه ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

تذکر: در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطه

نقطه اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به دست می‌دهد. اما همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با

این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل: ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است:

$$V = x \cdot l^2$$

باید l را بر حسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x, \quad x \in [0, 15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 & (\text{نقطه بحرانی تابع } V) \\ x=15 \notin (0, 15) \end{cases}$$

جدول تغییرات تابع V در بازه مورد نظر به صورت زیر است:

x	۰	۵	۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$		+	-
$V(x)$	۰	۲۰۰۰	۰

↗ ماکزیم مطلق ↘

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل مورد نظر، $2000 \text{ (cm}^3\text{)}$ است که به ازای $x = 5 \text{ (cm)}$ حاصل می‌شود.

مثال ۳: می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل در باز بسازیم که حجم آن 10 m^3 بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع 100 هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع 60 هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل: لازم است هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$C = 100(x \cdot l) + 60[2xh + 2lh]$$

$$= 100xl + 120h(x + l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$

$$C = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

لازم است C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$V = 10 \text{ (m}^3\text{)} \Rightarrow x \cdot l \cdot h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = 2000x^2 + 360x\left(\frac{5}{x}\right) \Rightarrow C(x) = 2000x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع $C(x)$ را به دست می آوریم :

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 4000x - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4000x^3 - 1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 4000x^3 - 1800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m) \quad (C \text{ تابع بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C ، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{4000x^3 - 1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(4000x^3 - 1800)$ است. چرا؟

x	0	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		$-$	$+$
$C(x)$	$+\infty$	≈ 1635	$+\infty$

↙ مینیمم مطلق C ↘

از جدول دیده می شود که اگر عرض قاعده مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱,۶۳۵,۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به دست می آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

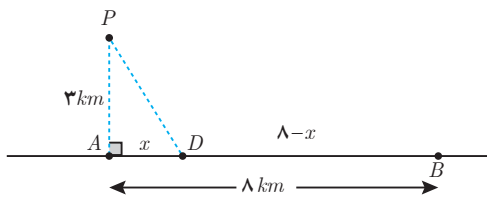
$$\Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38 \text{ (ساعت)} \quad (C \text{ تابع بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$ ، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$		$+$	$-$
$C(t)$	0	≈ 18	0

↙ ماکزیمم مطلق C ↘

با توجه به جدول، دیده می شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.



مثال ۵: آرمان درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده‌روی کند؟

حل: نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$D \text{ تا } P \text{ مسیر} : t_1 = \frac{PD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9}$$

$$B \text{ تا } D \text{ مسیر} : t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$B \text{ به } P \text{ از زمان کل رسیدن} : t = t_1 + t_2$$

$$t(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right) \quad x \in [0, 8]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطه بحرانی t را به دست می‌آوریم.

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ (km)}$$

جدول تغییرات $t(x)$ به صورت زیر است:

x	۰	$\sqrt{3}$	۸
$t'(x)$	-	۰	+
$t(x)$ بر حسب ساعت	$\frac{3}{5}$	$\frac{8 + 3\sqrt{3}}{4} \approx \frac{3}{3}$ مینیمم مطلق t	$\frac{\sqrt{73}}{2} \approx \frac{4}{27}$

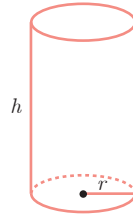
از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A ، برابر $\sqrt{3} \approx 1.73$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً $\frac{3}{3}$ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.
حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

$$\text{حجم استوانه } 1 \text{ (lit)} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000 \text{ (cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = S : مساحت کل استوانه



$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر 800000 تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

$$\text{هزینه } t \text{ ساعت حرکت: } C = 800000t + (320v^2)t$$

$$\text{هزینه } x \text{ کیلومتر حرکت: } C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$$

$$\text{هزینه } 1 \text{ کیلومتر حرکت: } C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$$

نقطه بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها 10° باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

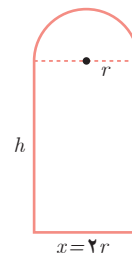
۴ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای $4/5$ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.
حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{4} \rightarrow h = \frac{9}{8} - r - \frac{\pi r}{4}$$

مساحت پنجره $S =$ مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره

$$S = xh + \frac{1}{4}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{8} - r - \frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{4}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{4}\right)r^2 + \frac{9}{4}r$$



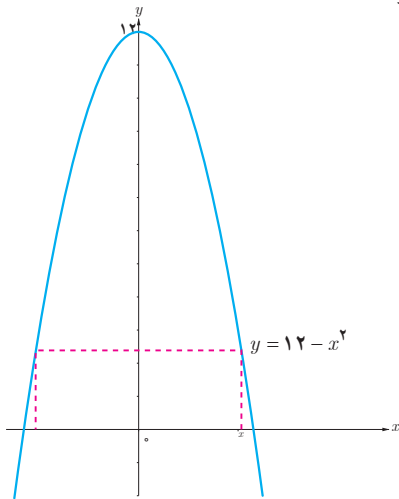
با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.



دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس: ۱۳۱۷، مساحت: ۲/۵ هکتار)

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید. ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟ ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.



۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^2$ باشند.

۴ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲ cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه ۲ cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

